Übungsblatt 13

68. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \cot(x)\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}\right)$, (d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

69. Betrachten Sie die Funktionen

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für $k = 0, 1, 2$. Zeigen Sie, dass

- f_0 in 0 nicht stetig ist,
- f_1 in 0 zwar stetig aber nicht differenzierbar ist, und dass
- f_2 in 0 differenzierbar ist mit $f_2'(0) = 0$, aber dort kein Extremum hat.

70. Sei α eine reelle und β eine positive reelle Zahl. Gegeben ist die Funktionsvorschrift

$$f(x) := x^\alpha (1-x)^\beta .$$

Bestimmen Sie die Extremwerte dieser Funktion auf dem Intervall $[0,1]$.

71. Es seien s und c zwei auf $\mathbb{R}$ definierte und dort differenzierbare reelle Funktionen mit $s' = c$ und $c' = -s$ auf ganz $\mathbb{R}$, wobei $c(0) = 1$ und $s(0) = 0$. Bestimmen Sie die Funktionen s und c.

Hinweis: Betrachten Sie geeignete Hilfsfunktionen und gehen Sie vor wie bei der Charakterisierung der Exponentialfunktion durch $y' = y$, $y(0) = 1$. Wählen Sie $h_1 := c\sin - s\cos$ und eine geeignete zweite Hilfsfunktion.

72. Zeigen Sie für $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die Ungleichung $e^x < \frac{e}{1+x-x^2}$.

73. Zeigen Sie:

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arsinh}(x), \qquad x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$$

Gilt diese Identität auch in den Endpunkten $x = \pm 1$? (Beweis oder Widerlegung.)