1. In welchen Punkten ihres Definitionsbereiches ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < x \leq 0, \\ x^2 & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ \sqrt{1-(x-1)^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

   differenzierbar?

2. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x\,(1 + 2x\sin(1/x)) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie:

   (a) Die Funktion f ist überall in $\mathbb{R}$ differenzierbar.

   (b) Es gilt $f'(0) > 0$, aber jede Umgebung von 0 enthält Intervalle, auf denen f streng monoton fällt. Folgern Sie: die Ableitungsfunktion f' ist unstetig in 0.

   (c) Skizze.

3. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 1/(1 + x^2)$.

   (a) Bestimmen Sie eine möglichst optimale globale Konstante M so, dass

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y| \qquad \text{für all } x, y \in \mathbb{R}.$$

   (b) **(Bonus)** Ist für $x \neq y$ Gleichheit in obiger Abschätzung möglich?

4. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{x}\right), \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}, \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x + \cos(x)}{x}.$$

5. Zeigen Sie, dass folgendes asymptotische Verhalten gilt:

$$e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \simeq \frac{e/2}{x} \qquad \text{für } x \to \infty.$$

6. Beweisen Sie folgende Ungleichungen:

   (a) $e^x\,(y - x) < e^y - e^x < e^y\,(y - x)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.

   (b) $\ln(x) < \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}, \qquad x > 1.$