

7. Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) := \cos(x) \ln \left(\frac{\cos(x)}{x + \ln(1 + x^2)} \right) + \arctan(\sqrt{x(1-x)}).$$

8. Es seien c und s zwei reelle auf ganz $\mathbb{R}$ definierte und dort differenzierbare Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} c'(x) &= -s(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ s'(x) &= c(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ c(0) &= 1, \\ s(0) &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie c und s .

Hinweis: Betrachten Sie geeignete Hilfsfunktionen und gehen Sie vor wie bei der Charakterisierung der Exponentialfunktion durch ihre Differentialgleichung.

9. Es sei f in $[a, b]$ differenzierbar und es gelte: $f(a) = 0$, $f(b) > 0$, $f'(b) < 0$. Zeigen Sie: Dann gibt es in (a, b) eine Stelle c mit $f'(c) = 0$.

10. Wenn f und g in einem Intervall I differenzierbar sind und es gilt:

$$f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$$

so liegt zwischen zwei Nullstellen von f immer eine Nullstelle von g . (Beweis!)

11. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle Ableitungen von f an der Stelle 0 verschwinden.

12. Sei f in einer Umgebung vom Punkt x differenzierbar und im Punkt x zweimal differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2 \operatorname{sign}(x)$, wobei die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sign}(x)$ gleich -1 für $x < 0$, 0 für $x = 0$ und 1 für $x > 0$ ist, in $x = 0$ nicht zweimal differenzierbar ist, obwohl der obige Grenzwert existiert.