13. Die *Legendre-Polynome* P_n sind durch die Rodrigues-Formel gegeben:
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n\right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$
   (a) Zeigen Sie, dass P_n ein Polynom vom Grad n mit n verschiedenen Nullstellen im Intervall $(-1,1)$ ist.

   (b) Bestimmen Sie die Werte $P_n(\pm 1)$.

   (c) Zeigen Sie, dass P_n der folgenden *Legendreschen Differentialgleichung* genügt:
$$\left(1-x^2\right) P_n''(x) - 2x\, P_n'(x) + n\,(n+1)\, P_n(x) = 0.$$
   Hinweis: Differenzieren Sie die Funktion $(x^2-1)p'(x)$ mit $p(x) = (x^2-1)^n$ $(n+1)$-mal auf zwei verschiedene Weisen.

14. (a) Zeigen Sie: die Funktion $f(x) := x^\gamma$ ist für $\gamma > 1$ konvex auf $(0,\infty)$.

   (b) Beweisen Sie die Mittelungleichung: für alle $0 < \alpha < \beta$ und nicht-negativen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ und nicht-negativen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt
$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\, x_k^\alpha\right)^{1/\alpha} \leq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\, x_k^\beta\right)^{1/\beta}. \tag{1}$$
   (c) Untersuchen Sie in (1) den Grenzübergang $\alpha \to 0$.

15. Sei f stetig auf einem Interval (a,b) mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Es gelte
$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad \text{für alle } x,y \in (a,b).$$
   Zeigen Sie: f ist konvex auf (a,b).

16. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe
$$J_0(x) := \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$
   absolut auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, mindestens zweimal auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und die folgende Differentialgleichung erfüllt:
$$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + x^2\, y = 0.$$

17. Gegeben ist die Funktion
$$f(x) := \ln(1 - x + x^2).$$
   (a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,0,x)$.

   (b) Geben Sie eine Schranke für den Fehler $|f(x) - T_2(f,0,x)|$ im Interval $[0,1]$ an.

   (c) **(Bonus)** Wie (a) und (b), jedoch für das n-te Taylorpolynom $T_n(f,0,x)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

18. (a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, \qquad x \in (-1,1), \tag{2}$$

normal konvergiert auf jedem Interval $[-a, a]$ mit $0 < a < 1$.

(b) Zeigen Sie, dass (2) eine Potenzreihendarstellung $\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, x^m$ hat. Bestimmen Sie insbesondere die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots$.