19. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) := \frac{x^3}{x^2 - 2x - 15}.$$

Programm: Definitionsmenge und Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Nullstellen, Extrema, Monotonie, Wendepunkte, Krümmungsverhalten, Bildmenge, Verhalten am Rande des Definitionsbereiches, Asymptoten und Skizze.

20. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} - 6, \qquad x \geq 0.$$

Programm: Definitionsmenge und Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Nullstellen, Extrema, Monotonie, Wendepunkte, Krümmungsverhalten, Bildmenge, Verhalten am Rande des Definitionsbereiches, Asymptoten und Skizze.

21. Es seien f und g reelle Funktionen mit geeigneten Definitions- und Wertebereichen. Untersuchen Sie, ob die Komposition $f \circ g$ eine Regelfunktion ist, wenn

   (a) f stetig und g Regelfunktion ist.

   (b) f Regelfunktion und g stetig ist.

   (c) f und g beide Regelfunktionen sind.

   (Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.)

22. Sei $F : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, eine konvexe Funktion und $g : [a, b] \to I$ eine Regelfunktion. Weiters sei p eine nicht-negative Regelfunktion auf $[a, b]$ mit $\int_a^b p(x)\, dx = 1$.

   Zeigen Sie die Jensensche Ungleichung für Integrale

$$\int_a^b F(g(x))\, p(x)\, dx \geq F\left(\int_a^b g(x)\, p(x)\, dx\right).$$

Hinweis: Adaptieren Sie den Beweis der Jensenschen Ungleichung aus der Vorlesung unter Verwendung der Stützgeraden.

23. Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch Approximation des Integranden durch geeignete Treppenfunktionen mit den vorgegebenen Stützstellen:

   (a) $\int_0^1 x^2\, dx$ und äquidistante Stützstellen.

   (b) $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ und Wurzeln $2^{k/n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ als Stützstellen.