

24. Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für irrationales } x, \\ 1/q & \text{für } x = p/q \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

eine Regelfunktion?

25. Der *natürliche Logarithmus*  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  kann auch als Stammfunktion der rationalen Funktion  $1/x$  eingeführt werden. Setzen Sie

$$L(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0,$$

und zeigen Sie ohne Benutzung des Logarithmus:

- (a)  $L$  ist auf  $(0, \infty)$  differenzierbar und hat die Ableitung  $L'(x) = 1/x$ ;
- (b)  $L$  wächst streng monoton und ist konkav;
- (c)  $L(xy) = L(x) + L(y)$  für  $x, y > 0$ ;
- (d)  $L(e^x) = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

26. Es seien  $n, m \in \mathbb{N}_0$ . Berechnen Sie

$$(a) \int_0^1 x^n (1-x)^m dx; \quad (b) \int x^n \sin(x) dx.$$

27. Berechnen Sie

$$(a) \int \frac{1}{x (\ln(x))^3} dx; \quad (b) \int \sin^3(x) \cos^4(x) dx.$$

28. Berechnen Sie

$$(a) \int \frac{x^5 - x + 1}{x^2(1-x^2)} dx; \quad (b) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} dx.$$