29. Es seien P_k die in Beispiel 13 eingeführten *Legendre-Polynome*. Zeigen Sie:

    (a) Die Legendre-Polynome P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, bilden ein Orthogonalsystem auf $[-1,1]$ bezüglich des Skalarprodukts
    $$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx, \qquad f, g \in \mathcal{C}([-1,1]);$$
    d.h., es gilt für beliebige $m, n \in \mathbb{N}_0$ die Orthogonalitätsrelation
    $$\langle P_m, P_n\rangle = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n},$$
    wobei das *Kronecker-Delta* $\delta_{m,n}$ gleich 1 ist für $m = n$ und 0 sonst.
    Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration und die Definition von P_n in Beispiel 13, um $\langle x^m, P_n\rangle = 0$ für $m < n$ zu zeigen. Für $\langle P_n, P_n\rangle$ benötigen Sie $P_n^{(n)}$.

    (b) Die Legendre-Polynome P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, erfüllen die 3-Term-Rekursion
    $$(n+1)\, P_{n+1}(x) = (2n+1)\, x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x).$$
    Hinweis: Ein Polynom p vom Grad n kann als Linearkombination $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$ dargestellt werden, wobei $\alpha_k = \langle p, P_k\rangle / \langle P_k, P_k\rangle$. (Zeigen Sie dies.) Setzen Sie $p(x) = (2n+1)\, x\, P_n(x)$.

30. Beweisen Sie das Folgenkriterium für Riemann-Integrierbarkeit.

31. Zeigen Sie, dass
    $$\int_0^1 x^x\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$
    gilt und berechnen Sie damit das Integral auf 10 Stellen genau.

32. Bestimmen Sie den Grenzwert
    $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

33. Zeigen Sie, dass
    $$\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\, dx$$
    konvergiert, und bestimmen Sie seinen Wert.
    Hinweis: für die Bestimmung des Wertes des Integrals helfen die Verdopplungsformel für die Sinusfunktion und Symmetrieüberlegungen.

34. Zeigen Sie, dass das folgende Integral konvergiert:
    $$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\, dx.$$
    Zusatz: Zeigen Sie, dass dieses Integral den Wert 0 annimmt.