35. Seien $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ und $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen. Die Funktion u habe eine beschränkte Stammfunktion und v konvergiere für $x \to \infty$ monoton fallend gegen 0. Zeigen Sie, dass dann $\int_0^\infty u(x)v(x)\,dx$ konvergiert.

    Ein analoges Resultat gilt auch für Reihen.

    Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen mit beschränkten Partialsummen: $|\sum_{k=1}^n a_k| < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Folge, die monoton gegen 0 konvergiert. Zeigen Sie, dass dann $\sum_{n=1}^\infty a_n\, b_n$ konvergiert.

    Hinweis: Abelsche Summation; siehe UE Analysis 1 WS2016/17, Beispiel 19.

36. Zeigen Sie die folgenden Identitäten für Bernoulli-Polynome:

    (a) $$m^{\ell-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_\ell\Big(\frac{x+k}{m}\Big) = B_\ell(x), \quad \ell \in \mathbb{N}_0,\, m \in \mathbb{N};$$

    (b) $$B_\ell(1-x) = (-1)^\ell B_\ell(x), \quad \ell \in \mathbb{N}_0,\, x \in \mathbb{R};$$

    (c) $$B_\ell(x+1) - B_\ell(x) = \ell x^{\ell-1}, \quad \ell \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R};$$

    (d) $$\sum_{k=1}^n k^r = \frac{B_{r+1}(n+1) - B_{r+1}(1)}{r+1}, \quad r \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}.$$

37. Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Integrale*: Gegeben zwei Regelfunktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{C}$, dann gilt:

    $$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \le \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}\, \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\, dx}.$$

    Hinweis: Betrachten Sie das Integral $\int_a^b |f(x) - \lambda g(x)|^2 dx$, $\lambda \in \mathbb{C}$, und wählen Sie λ geeignet.

    Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$.
    Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Ungleichung

    $$\left|\int_0^1 f(x)\, dx\right|^2 \le \frac{1}{12} \int_0^1 |f'(x)|^2\, dx.$$

38. Zeigen Sie

    $$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{N} \right) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \int_1^\infty \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^{3/2}}.$$