39. Bestimmen Sie die Summe der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}.$$

40. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf $D \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $x \in D$ konvergente Folge von Punkten aus D. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$ gilt.

41. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von auf dem Intervall $[a,b]$ definierten und dort stetigen Funktionen mit der punktweisen Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\mathbb{N}} f_n(x)$, $x \in [a,b]$.

    Zeigen Sie: Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert, dann ist

    (a) f Riemann-integrierbar und

    (b) Grenzwertbildung und Integration können vertauscht werden; d.h.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

42. Gegeben ist die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x) = nx(1-x)^n$ auf $[0,1]$. Zeigen Sie:
    (a) Dass (f_n) auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig konvergiert.
    (b) Dass trotzdem gilt:

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x).$$

    (c) Dass die Funktionenfolge gliedweise integriert werden darf.

43. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$(f_n) \text{ mit } f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

    nicht auf $[0,1]$, wohl aber auf jedem Teilintervall $[q,1]$, $0 < q < 1$, gleichmäßig konvergiert.

44. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 f(\sqrt{x_1\, x_2 \cdots x_n})\, dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots dx_n.$$

    Hinweis: Bestimmen Sie diesen Grenzwert zuerst wenn f ein Polynom ist.