45. Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen mit Summe A und B. Sei weiters $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiere zur Summe C.

    Zeigen Sie, dass dann gilt: $C = AB$.

46. Ein metrischer Raum heißt *ultrametrisch*, wenn anstelle der Dreiecksungleichung die stärkere Ungleichung
    $$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z))$$
    gilt. Es sei $B(a, r) := \{x : d(a, x) < r\}$ die Kugel mit Radius r um den Mittelpunkt a. Zeigen Sie:

    (a) Alle $y \in B(a, r)$ sind Mittelpunkte derselben Kugel; d. h., $B(y, r) = B(a, r)$.

    (b) Für zwei Kugeln $B(x_1, r_1)$ und $B(x_2, r_2)$ gilt entweder
    $$B(x_1, r_1) \subseteq B(x_2, r_2) \qquad \text{oder} \qquad B(x_2, r_2) \subseteq B(x_1, r_1)$$
    oder
    $$B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) = \emptyset.$$

    (c) In einem ultrametrischen Raum ist jedes Dreieck gleichschenkelig.

47. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Cauchy-Folgen in einem metrischen Raum (X, d). Zeigen Sie, dass dann $(d(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine (reelle) Cauchy-Folge ist. Zeigen Sie weiters, dass d stetig auf $X \times X$ ist.

48. Sei (X, d) ein Raum mit einer Pseudometrik d: Dabei ersetzt
    $$M1': \forall x \in X : d(x, x) = 0$$
    die Definitheitsbedingung M1. Die Bedingungen M2 und M3 sind wie bei einer Metrik. Zeigen Sie, dass dann $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ eine Äquivalenzrelation definiert. Bezeichne $[x]$ die Klasse von x. Zeigen Sie, dass auf $X/_\sim$ durch $d'([x], [y]) := d(x, y)$ eine Metrik definiert wird.

49. Gegeben sei eine beliebige Metrik d auf X und
    $$d^*(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \qquad x, y \in X.$$
    Zeigen Sie,

    (a) dass d^* eine beschränkte Metrik auf X ist.

    (b) dass i.a. eine beschränkte und abgeschlossene Menge nicht kompakt sein muss.

    (c) dass jede Kugel in der einen Metrik eine Kugel in der anderen Metrik ist, und damit, dass eine Menge offen bzgl. d ist genau dann, wenn sie offen bzgl. d^* ist.