50. Ein metrischer Raum (X, d) hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, falls für jede Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen von X für welche alle endlichen Durchschnitte $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}$ mit $i_1, \ldots, i_n \in I$ nicht leer sind stets auch $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ gilt.

    (a) Zeigen Sie: Der metrische Raum (X, d) ist kompakt genau dann, wenn er die endliche Durchschnittseigenschaft hat.

    (b) Beweisen Sie mit Überdeckungskompaktheit: In einem metrischen Raum (X, d) ist jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge von X auch kompakt.

    (c) Zeigen Sie den Satz vom Minimum und Maximum für Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$, wobei (X, d) ein kompakter metrischer Raum ist.
    Hinweis: Benutzen Sie die endliche Durchschnittseigenschaft in Ihrem Beweis.

51. Es sei $X := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

    (a) Die Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

    $$d(m, n) := \frac{|m-n|}{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \qquad d(m, \infty) = d(\infty, m) := \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

    und $d(\infty, \infty) := 0$ ist eine Metrix auf X.

    (b) Die Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist stetig genau dann, wenn

    $$\lim_{n\to\infty} f(n) = f(\infty).$$

    (c) Bestimmen Sie all offenen, abgeschlossenen, kompakten Teilmengen von (X, d). Ist (X, d) kompakt bzw. vollständig?

52. Es sei $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit der Metrik

    $$d((x_n), (y_n)) := \begin{cases} 2^{-\min\{n\in\mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}} & (x_n) \neq (y_n), \\ 0 & (x_n) = (y_n) \end{cases} \qquad (x_n), (y_n) \in X.$$

    Zeigen Sie,

    (a) dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

    (b) dass (X, d) kompakt ist.

    (c) **[Bonus]** dass $f : X \to \mathbb{R}$ mit

    $$(\epsilon_n) \mapsto 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{3^n}$$

    stetig und injektiv ist und die Umkehrabbildung auch stetig ist (f heißt dann "Homöomorphismus").
    Hinweis: Zeigen Sie für geeignete Werte von c und α, dass

    $$\big|f((x_n)) - f((y_n))\big| \geq c\big(d((x_n), (y_n))\big)^{\alpha} \qquad \textit{für alle } (x_n), (y_n) \in X.$$

53. Sei $K \neq \emptyset$ kompakt mit Metrik d. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : K \to K$ mit der Eigenschaft

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \qquad x, y \in K, x \neq y,$$

genau einen Fixpunkt besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto d(x, f(x))$, $x \in K$.