54. Sei $(x_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen $\neq -1$. Das unendliche Produkt

$$p = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x_k)$$

heißt konvergent, wenn die Folge der Partialprodukte

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)$$

gegen p konvergiert und $p \neq 0$ gilt. Das Produkt heißt absolut konvergent, wenn die Folge der Produkte

$$q_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + |x_k|)$$

beschränkt ist. Zeigen Sie, dass absolut konvergente Produkte konvergieren, und dass p genau dann absolut konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie die Ungleichungen

$$e^{x/2} \leq 1 + x \leq e^x, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

und

$$\left| \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + |x_n|) - 1.$$

55. Berechnen Sie $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ für $n \in \mathbb{Z}$. **Bonus:** Berechnen Sie $\Gamma'(\frac{1}{2})$.

56. Zeigen Sie, dass die *Betafunktion*

$$B(a, b) := \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}, \qquad a, b > 0.$$

die folgende Integraldarstellung besitzt:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1 - t)^{b-1}\, dt, \qquad a, b > 0.$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Bohr-Mollerup auf eine geeignete Hilfsfunktion an.

57. Zeigen Sie die Multiplikationsformel

$$\Gamma(m\,x) = (2\pi)^{\frac{1-m}{2}} m^{m\,x-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\Big(x + \frac{k}{m}\Big), \qquad m \in \mathbb{N},\ x > 0.$$

58. Untersuchen Sie das Verhalten von $|\Gamma(x + i\,y)|$, $x > 0$ fest, für $y \to \pm\infty$.

Anleitung: Verwenden Sie, dass die Stirlingsche Formel für $x > 0$ auf komplexe Argumente fortgesetzt werden kann.