59. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Asteroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

im ersten Quadranten $x, y \geq 0$.

Zeigen Sie, dass ein Punkt auf einem Kreis mit Radius 1/4, der im Einheitskreis innen abrollt, eine Astroide beschreibt.

60. Die *Traktrix* ist durch die Gleichungen

$$x(t) = t - \tanh(t), \qquad y(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$$

für $t \geq 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Abschnitt der Tangente zwischen dem Punkt $(x(t), y(t))$ und der x-Achse konstante Länge hat. Argumentieren Sie damit, dass diese Kurve von einem Massenpunkt beschrieben wird, der an einer Kette gezogen wird. Bestimmen Sie die Evolute der Traktrix.

61. Die logarithmische Spirale ist in Polarkoordinaten durch $r(\phi) = e^{-c\phi}$ $(c > 0)$ gegeben. Zeigen Sie, dass diese Kurve jeden vom Ursprung ausgehenden Strahl unter demselben Winkel schneidet. Berechnen Sie die Fläche des Sektors, der von der Kurve für $0 \leq \phi \leq 2\pi$ eingeschlossen wird, und die Bogenlänge der Kurve für $0 \leq \phi < \infty$.

62. Berechnen Sie das Integral

$$\gamma_\alpha := \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^\alpha dt \tag{3}$$

und zeigen Sie, dass das Volumen der d-dimensionalen Kugel

$$\mathbb{B}^d := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d | x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq R^2\}$$

mit Radius R durch

$$V_d(R) := \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} R^d$$

gegeben ist.

Anleitung: Die 1-dim. Kugel mit Radius R ist das Interval $[-R, R]$ in $\mathbb{R}$; d.h., $V_1(R) = 2R$. Die Fläche der 2-dim. Kugel (Kreisscheibe) mit Radius R ergibt sich durch Integrieren über horizontale Schnitte (1-dim. Kugeln mit geigneten Radien):

$$V_2(R) = \int_{-R}^{R} V_1(\sqrt{R^2 - t^2})\, dt = R^2 \int_{-1}^{1} V_1(\sqrt{1 - t^2})\, dt = R^2\, 2 \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}\, dt.$$

Um das Integral unabhängig vom Radius R zu machen, wurde $V_d(R\eta) = R^d\, V_d(\eta)$, $\eta, R > 0$, benützt. Dieses "Integrieren über Schnitte" (d.h. $(d-1)$-dim. Kugeln) ist allgemein für $d \geq 2$ anwendbar.

Zusatz: Die Gammafunktion in der Volumenformel ist für natürliche Zahlen und halbzählige Zahlen auszuwerten und kann daher eliminiert werden. Formen Sie $V_d(R)$ entsprechend um.

63. (a) Leiten Sie Formeln für die Krümmung und Torsion einer Raumkurve in allgemeiner Parameterdarstellung ab.

    (b) Bestimmen Sie das begleitende Dreibein im Punkt $(0, 1, \frac{1}{2})$ der Raumkurve (4),

$$\gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t \\ \frac{1}{2}\, t^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2} \leq t < 4. \tag{4}$$

    (c) Bestimmen Sie Krümmung und Torsion im Punkt $(0, 1, \frac{1}{2})$ der Raumkurve in (4).