64. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für diese Funktion alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ existieren, aber dass die Funktion in diesem Punkt nicht differenzierbar ist.

65. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2+xy-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \begin{cases} \frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

66. Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei für $y \geq 0$ durch

$$g(x,y) := \begin{cases} y - x^2 & \text{für } y \geq x^2, \\ \frac{y^2}{x^2} - y & \text{für } 0 \leq y < x^2 \end{cases}$$

und für $y < 0$ durch

$$g(x,y) := -g(x,-y)$$

definiert. Zeigen Sie: g ist in jedem Punkt aus $\mathbb{R}^2$ differenzierbar, aber $g \notin C^1(\mathbb{R}^2)$.

67. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $v(x,y) = u(x^2y^2, xy, y^2)$ nach der Kettenregel für: (a) $u(x_1,x_2,x_3) = x_1 \sin(x_2+x_3)$, (b) $u(x_1,x_2,x_3) = x_2 \ln(x_1+x_2x_3)$.