1. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im maximalen Definitionsbereich.

Wie glatt ist die Funktion im maximalen Definitionsbereich bzw. in der punktierten Ebene? Insbesondere, existieren die 1. und 2. partiellen Ableitungen im Ursprung?

2. Bestimmen Sie die zweite Ableitung von

$$f(x,y,z) = x^{yz}$$

im Punkt $\mathbf{a} = (1,1,1)$.

Was ist der maximale Defintionsbereich von f? Wie glatt ist f dort?

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) := \ln(x-y).$$

(a) Entwickeln Sie die Funktion f nach dem Taylorschen Satz um $\mathbf{a} = (0,-1)$ bis zu den Termen zweiter Ordnung.

(b) Geben Sie eine geometrische Deutung der Terme in Ihrer Taylorformel.
Zusatz: Überlegen Sie sich eine lineare Transformation der Variablen (x,y) so, dass die Taylorformel besonders einfach wird.

(c)* Geben Sie eine qualitative und quantitative Abschätzung des Rests an.

(d)* Finden Sie die Taylor-Reihe für f mit Entwicklungspunkt $\mathbf{a}$. Falls es sie gibt, wo konvergiert diese Reihe?

4. Finden Sie zwei bivariate Funktionen $f = f(x,y)$ und $g = g(x,y)$ mit derselben semidefiniten 2. Ableitung im Ursprung $(0,0)$ so, dass f dort ein absolutes Maximum und g dort kein lokales Extremum besitzt.

5. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) := \operatorname{Im}((x + i\,y)^3)$$

auf Extrema im maximalen Definitionsbereich.

Skizzieren Sie eine Höhenlinien-Abbildung mit den kritischen Punkten.

6. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) := \left| \frac{x^2-y^2}{1-\frac{1}{2}x-y} \right|$$

auf Extrema im maximalen Definitionsbereich eingeschränkt auf die Halbebene $y \geq -1$.

Skizzieren Sie diesen Bereich und tragen Sie kritische Punkte ein.