11. Finden Sie die Richtungsableitung der Funktion $F(x,y,z) := xy + 2xz - y^2 + z^2$ im Punkt $P(1,-2,1)$ entlang der Kurve $\mathbf{r} = (t, t-3, t^2)$ in Richtung wachsendem t.

12. Bestimmen und Klassifizieren Sie die Extrema einer der folgenden Funktionen:

$$\text{(a) } f(x,y) := x^2 + 4y + \frac{1}{y}, \qquad \text{(b) } f(x,y) := \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x},\ x,y \geq -1.$$

13. Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte, endlich dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-Algebra $L(V,W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W.

   (a) Zeigen Sie, dass durch

$$\|f\| := \sup\{\|f(v)\|_W \ : \ v \in V,\ \|v\|_V \leq 1\}$$

   eine Norm auf $L(V,W)$ definiert wird.

   (b) Wird $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ gewählt, so kann $L(V,W)$ mit $\mathbb{R}^{m\times n}$ identifiziet werden. Betrachten Sie $\mathbb{R}^{m\times n}$ als normierten Vektorraum mit einer wie oben beschriebenen Norm. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{n\times n}$ eine Banachalgebra ist. Insbesondere gilt die Submultiplikativität $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|$.

14. Betrachten Sie $\mathbb{R}^{m\times n}$ als normierten Vektorraum wie in Aufgabe 13. Zeigen Sie für $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

   (a) Wird $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ als $\|\cdot\|_\infty$ gewählt, dann gilt $\|\boldsymbol{A}\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

   (b) Wird $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ als $\|\cdot\|_1$ gewählt, dann gilt $\|\boldsymbol{A}\| = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$.

   (c) Wird $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ als $\|\cdot\|_2$ gewählt, dann gilt $\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\lambda}$, wobei λ den größten Eigenwert von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ bezeichnet.

   Zusatz: Zeigen Sie, dass die Abbildung $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \mapsto \mathrm{Spur}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist und damit eine Norm definiert. Zeigen Sie weiters, dass diese Frobeniusnorm $\|\cdot\|_\mathrm{F}$ submultiplikativ und mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ verträglich (d.h., $\|\boldsymbol{Ax}\|_2 \leq \|\boldsymbol{A}\|_\mathrm{F}\|\boldsymbol{x}\|_2$) ist, jedoch sich nicht mit Hilfe einer Operatornorm wie in Aufgabe 13 darstellen lässt. Drücken Sie $\|\boldsymbol{A}\|_\mathrm{F}$ mittels der Matrixelemente aus.

15. Zeigen Sie folgendes Resultat. Gegeben sei ein submultiplikative Matrixnorm $\|\cdot\|$. Es seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $\boldsymbol{A}$ invertierbar ist und

$$\|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\| < \frac{1}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}.$$

   Dann gilt: $\boldsymbol{B}$ ist invertierbar und

$$\left\|\boldsymbol{B}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\right\| \leq \frac{\|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\|}{1 - \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\| \|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\|} \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|^2.$$

   Hinweis: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}))$.