21. Seien $-1 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} \leq 1$ reelle Zahlen. Bestimmen Sie diejenigen Werte von $x_0, \ldots, x_{n+1}$, für die die *diskrete logarithmische Energie*

$$E(x_0, \ldots, x_{n+1}) := \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} \log \frac{1}{(x_j - x_i)}$$

minimal wird. Hinweise:

(a) Zeigen Sie, für eine minimierende Punktmenge gilt stets $x_0 = -1$ und $x_{n+1} = 1$.

(b) Bestimmen Sie für ein Polynom p mit lauter einfachen reellen Nullstellen die Partialbruchzerlegung von $\frac{p'}{p}$.

(c) Setzen Sie für eine Punktmenge $\{-1, x_1, \ldots, x_n, 1\}$ minimaler log. Energie

$$p(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

und drücken Sie die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial E(-1, x_1, \ldots, x_n, 1)}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

durch p aus.

(d) Zeigen Sie damit und durch Gradüberlegungen, dass p die Gleichung

$$(x^2 - 1)p''(x) + 4xp'(x) = Cp(x)$$

erfüllen muss. Identifizieren Sie C, indem Sie den Grad von p verwenden.

Zusatz: Zeigen Sie, dass $p(x) = DP'_{n+1}(x)$ für ein $D \in \mathbb{R}$ gilt; dabei bezeichnet P_n das n-te Legendre-Polynom.

22. Gegeben ist folgende Funktion

$$f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie Lage, Art und Grösse der lokalen Extrema von f.

(b) Wo in $\mathbb{R}^2$ ist f streng konvex/konkav?

23. Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie:

(a) Für eine invertierbare Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $e^{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{-1} e^{\mathbf{A}} \mathbf{S}$.

(b) Bestimmen Sie $e^{\mathbf{D}}$ für eine Diagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(c) Leiten Sie aus (a) und (b) ein Verfahren zur Berechnung von $e^{\mathbf{A}}$ für diagonalisierbare $\mathbf{A}$ her. Wenden Sie dieses Verfahren an für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

24. Zeigen Sie:

(a) Für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ gilt: $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$.
(Insbesondere gilt also $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}}$.)

(b) Die Aussage in (a) ist ohne die Vorraussetzung $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ nicht richtig.

(c) Berechnen Sie $e^{\mathbf{A}}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hinweis: Verwenden Sie (a).