

25. Gegeben eine auf $[0, 1]$ definierte reelle Funktion. Das n te Bernstein-Polynom von f , $n \in \mathbb{N}$, ist definiert als

$$B_n(f; x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Benützen Sie diese Polynome, um den Weierstraßschen Approximationssatz konstruktiv zu beweisen. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

- (a) Bernsteinpolynom für die Monome z^k , $k = 0, 1, 2$:

$$B_n(1; x) = 1, \quad B_n(z; x) = x, \quad B_n(z^2; x) = \frac{(n-1)x^2 + x}{n}.$$

- (b) Linearität bzgl. des Funktionsarguments,

$$B_n(\mu f + \lambda g; x) = \mu B_n(f; x) + \lambda B_n(g; x), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{R},$$

wobei insbesondere für festes ξ gilt

$$B_n(f - f(\xi); x) = B_n(f; x) - f(\xi).$$

Hinweis: Zeigen Sie für eine auf $[0, 1]$ stetige Funktion die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \|f\|_\infty \left(\frac{x - \xi}{\delta} \right)^2 + \frac{\epsilon}{2},$$

wobei ϵ und δ so bestimmt sind, dass $|x - \xi| \leq \delta$ impliziert $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

26. Zeigen Sie folgende Variante des zweiten Mittelwertsatzes für bestimmte Integrale: Sei $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ so, dass

$$\int_a^b h(x) f(x) dx = h(a^+) \int_a^\xi f(x) dx + h(b^-) \int_\xi^b f(x) dx.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst den Satz von Bonnet: Seien $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallende nichtnegative Funktion und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ so, dass

$$\int_a^b h(x) f(x) dx = h(a^+) \int_a^\xi f(x) dx.$$

Überlegen Sie die Beweisidee für differenzierbare Funktionen (partielle Integration) und ersetzen Sie die Integration(en) durch geeignete Summenbildungen.

27. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

für jedes $\delta > 0$ auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig konvergiert.

28. (a) Zeigen Sie folgende Formeln für den Dirichlet-Kern D_n und Fejer-Kern F_n :

$$D_n(\alpha) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad F_n(\alpha) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\left(n\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi \quad \text{und} \quad (ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 dx = \pi$$

gilt.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt$ über den Dirichlet-Kern D_n . Substituieren Sie $(n + \frac{1}{2})t = x$ und führen Sie den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ aus. Siehe auch das Buch von Königsberger.