34. Sei $(z_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen $\neq -1$. Das unendliche Produkt

$$p = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z_k)$$

heißt konvergent, wenn die Folge der Partialprodukte

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + z_k)$$

gegen p konvergiert und $p \neq 0$ gilt. Das Produkt heißt absolut konvergent, wenn die Folge

$$q_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + |z_n|)$$

beschränkt ist. Zeigen Sie, dass absolut konvergente Produkte konvergieren, und dass p genau dann absolut konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert.

35. Finden Sie, ausgehend von der Partialbruchzerlegung des Cotangens, die Produktdarstellung des Sinus und untersuchen Sie die Konvergenz.

36. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion $\phi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$, $0 < x < 2\pi$, 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt, an der (einzigen) Sprungstelle im Intervall $[-\pi, \pi]$. Zeigen Sie, dass es in der n-ten Partialsumme $S_n\phi$ zu einem "Überschwingen" in der Nähe der Sprungstelle kommt, das nicht kleiner wird, wenn n erhöht wird. Zeigen Sie für $x > 0$:

$$(S_n\phi)(x) + \frac{x}{2} = \int_0^{nx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt + o(1) \qquad \text{gleichmäßig in } 0 \leq x \leq \pi$$

um eine untere Schranke für $(S_n\phi)(x_n) - \phi(x_n)$ für eine geeignet gewählte Folge $(x_n)_n$ zu bekommen, die unabhängig von n ist.

Zeigen Sie, dass dieses *Gibbsches Phänomen* an den endlichen Sprungstellen jeder stückweise stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion auftritt.

37. Es sei ϕ eine nichtnegative Regelfunktion auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = 1$ und $(a_n)_n$ eine Folge positiver Zahlen mit $a_n \to \infty$. Zeigen Sie, dass die durch $\delta_n(x) := a_n\, \phi(a_n\, x)$ definierten Funktionen eine Dirac-Folge bilden. Verwenden Sie dieses Resultat, um zu zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2 + x^2}\, f(x)\, dx = f(0),$$

wobei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine in 0 stetige Regelfunktion ist.