38. Es sei $U$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f\colon U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion so dass

    (1) für alle $t \in [a,b]$ die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ stetig differenzierbar auf $U$ ist,

    (2) die Funktion $(x,t) \mapsto \frac{d}{dx} f(x,t)$ auf $U \times [a,b]$ beschränkt ist und

    (3) für jedes $x \in U$ das Integral $\int_a^b f(x,t)dt$ existiert.

    Zeigen Sie, dass $x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ auf $U$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{d}{dx} f(x,t)dt.$$

    **Hinweis:** *Betrachten Sie für ein fixes $x_0 \in U$ und eine Folge $(x_k)$ in $U$ die gegen $x_0$ konvergiert, die Funktionenfolge $\varphi_k(t) = \frac{f(x_k,t)-f(x_0,t)}{x_k - x_0}$ und verwenden Sie den Satz von der dominierte Konvergenz.*

    **Zusatz:** Zeigen Sie, dass für eine abklingende Funktion $f$ (d.h., $f(t,x) = \mathcal{O}(\frac{1}{|t|^{1+\epsilon}})$ für $|t| \to \infty$ gleichmäßig in $x \in [a,b]$ für ein $\epsilon > 0$) ein ähnliches Resultat für uneigentliche Integrale gilt.

39. (a) Vervollständigen Sie die Beweisskizze zur Fourier Transformation Umkehrformel aus der VO.

    (b) Zeigen Sie folgende Rechenregeln:

    i. Linearität:

$$\mathcal{F}\{a\,f + b\,g\} = a\mathcal{F}\{f\} + b\mathcal{F}\{g\}, \qquad a,b \in \mathbb{C}.$$

    ii. Verschiebungsgesetz:

$$\mathcal{F}\{e^{ict} f(at+b)\}(\omega) = \frac{1}{a} e^{ib(\omega-c)/a}\widehat{f}\Big(\frac{\omega - c}{a}\Big), \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

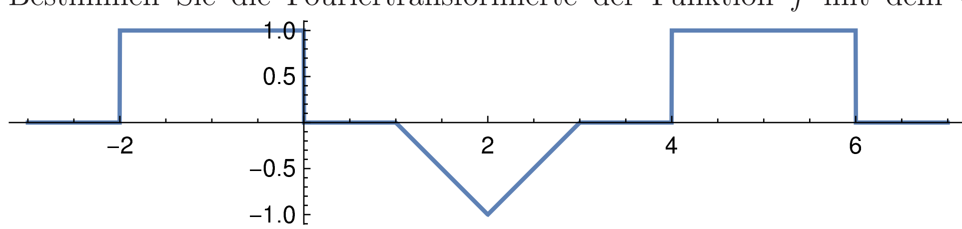
    iii. Differentiations- und Multiplikationsregel: für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}\}(\omega) = (i\omega)^n \widehat{f}(\omega), \qquad \mathcal{F}\{(-it)^n f\}(\omega) = \widehat{f}^{(n)}(\omega).$$

    iv. Faltungssatz (Faltung geeignet definiert):

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}.$$

    (c) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f$ mit dem Graphen:



40. Lösen Sie folgende Faltungsintegralgleichungen mittels Laplace-Transformation:

$$\text{(a) } u(t) = \sin(t) + \int_0^t u(t-\tau)\,\sin(\tau)\,d\tau, \quad \text{(b) } t\,v(t) + \int_0^t v(t-\tau)\,v(\tau)\,d\tau = 0.$$

41. **add 39(b)iv** Seien $f$, $\widehat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ und $g$, $\widehat{g} = \mathcal{F}\{g\}$ abklingende Funktionen. Zeigen Sie

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\},$$

wobei

$$(f * g)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$