

42. Vervollständigen Sie den Beweis des Shannonschen Abtastsatzes.
43. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

*Hinweis: Es gilt*

$$e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{n!} \int_n^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

*Diskutieren Sie die Funktion  $f_n(x) = n \ln(x) - x$  und verwenden Sie das Ergebnis, um die Integrale*

$$\int_n^{n+n^\alpha} x^n e^{-x} dx \quad \text{und} \quad \int_{n+n^\alpha}^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

*für passend gewähltes  $\alpha < 1$  abzuschätzen.*

44. Lösen Sie mittels Variationsrechnung das *Brachistochronenproblem*; d.h., finden Sie die Bahn zwischen einem Anfangspunkt  $A$  und einem gleich hoch oder tieferen Endpunkt  $B$ , auf der sich ein Massenpunkt unter Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei am schnellsten bewegt.

**Zusatz:** Zeigen Sie, dass diese Kurve auch eine *Tautochrone* ist; d.h., von jedem Punkt der Kurve benötigt der Massepunkt die gleiche Zeit, zum Tiefpunkt (der tiefer als  $A$  oder  $B$  liegen kann).

45. Lösen Sie mittels Variationsrechnung das *Katenoidenproblem*; d.h., finden Sie die Kurve, die den Durchhang einer an ihren Enden aufgehängten Kette unter dem Einfluss der Schwerkraft beschreibt (die Kette werde auf gleicher Höhe aufgehängt).