46. Erweitern Sie das Variationsrechnungskalkül auf Lagrange-Funktionen, die von mehr als einer allgemeinen Koordinate und Geschwindigkeit abhängen; d.h. bestimmen Sie für $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)$ das System der Euler-Lagrange-Gleichungen.

    Anwendung: Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für das ebene Doppelpendel im homogenen Schwerefeld (Schwerebeschleunigung g) und lösen Sie das System der Euler-Lagrange-Gleichungen für kleine Auslenkungswinkel φ_1 und φ_2 gegenüber der Vertikalen (verallgemeinerte Koordinaten).

47. Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral
$$\int_C \left(3x^2(1+y^2)z\,dx + 2x^3yz\,dy + x^3(1+y^2)\,dz \right)$$
wegunabhängig ist. Bestimmen Sie die Potentialfunktion ϕ des Vektorfeldes $\mathbf{V}$ im obigen Integral. Berechnen Sie den Wert des Integrals entlang eines Weges von $(0,0,1)$ nach $(2,4,1)$ und mit Hilfe der Potentialfunktion ϕ.

48. Berechnen Sie das Integral $\iint_B xy^2\,dxdy$, wobei B der von den Kurven $y=-1$, $x = \sin \pi y$, $y = (x+1)^3$ begrenzte Bereich ist.

49. Berechnen Sie die iterierten Integrale
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \right) dy \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \right) dx.$$
Was ergibt sich für das zugehörige Doppelintegral?

50. Berechnen Sie das Volumen der Körper, die von den angegebenen Flächen begrenzt werden:
    (a) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = x^2+y^2,$
    (b) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = xyz,$
    (c) $x-y+z=6, \quad x+y=2, \quad x=y, \quad y=0, \quad z=0,$
    (d) $x^2+y^2=z^2, \quad x^2+y^2=3x, \quad z>0.$

51. Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion
$$F(r) = \int \cdots \int_{x_1^2+\cdots+x_m^2 \le r^2} f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\,dx_2 \cdots dx_m.$$

52. Berechnen Sie das Integral
$$\int \cdots \int_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_m \le 1 \\ x_1,\ldots,x_m \ge 0}} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \cdots x_m^{\alpha_m-1}\,dx_1 \cdots dx_m$$
für $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$.