

53. Bestimmen Sie die Einhüllende folgender Kreisschar: Es sei $S(\mathbf{0}, 2R)$ der Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $2R$. Ein Kreis der Kreisschar hat den Mittelpunkt auf $S(\mathbf{0}, 2R)$ und der Radius ist genau der Normalabstand zur x -Achse (horizontaler Durchmesser).

Zusatz: Zeigen Sie, dass derselbe Typ von Einhüllenden sich als Kaustik eines Halbkreises ergibt; d.h., fallen in der Ebene parallele Lichtstrahlen in einen nach links offenen reflektierenden Halbkreis ein, so sind die reflektierten Lichtstrahlen die Tangenten an der besagten Einhüllenden.

54. Sei für $0 < \phi \leq \pi$ die Kurve C_ϕ durch

$$C_\phi := \{(2 + \cos(t), 1 + \sin(t)) \mid |t| \leq \phi\}$$

gegeben (die Orientierung ist durch die angegebene Parametrisierung festgelegt).

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\frac{1}{2} \int_{C_\phi} y dx - x dy$$

und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

55. Gegeben sei die Kurve

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \sin(3t), \\ y(t) = \cos(5t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

Hinweis: Das Integral lässt sich bei geeigneter Interpretation ohne Ausführung von Integration, allein durch "Zählen" bestimmen.

Zusatz: Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ bzw. allgemeiner für $\mathbb{R}^2 \setminus A$, wobei $A = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ eine endliche Menge von Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist und keine zwei Punkte dieselbe x -Koordinate haben.

56. Berechnen Sie direkt das Oberflächenintegral

$$\iint_{\partial B} (x^2 - xy) dy \wedge dz + (1 - 3y + z) dz \wedge dx + (e^x - xz) dx \wedge dy.$$

Dabei ist ∂B die Oberfläche des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$.

57. Es sei K ein homogener Körper (Dichte $\rho \equiv \text{const}$), der durch die Flächen $z^2 = 2x$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = x$ begrenzt ist. Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse (d.h., $I_3 = \iiint_B r_\perp^2 \rho dV$, wobei $r_\perp$ der Normalabstand eines Massenpunktes zur z -Achse ist).