

57. Bestimmen Sie das Flächenelement auf einem Torus, welches durch die Rotation eines Kreises mit Mittelpunkt $(R, 0, 0)$ mit Radius $0 < r < R$ um die z -Achse entsteht und bestimmen Sie mittels des Oberflächenintegral die Oberfläche.
58. (a) Zeigen Sie, dass nur Kegel-, Zylinder- und Tangentenflächen Torsen sind.
 (b) Zeigen Sie insbesondere, dass die Kugeloberfläche nicht abwickelbar ist.
59. Berechnen Sie direkt das Oberflächenintegral

$$\iint_{\partial B} (x^2 - xy) dy \wedge dz + (1 - 3y + z) dz \wedge dx + (e^x - xz) dx \wedge dy.$$

Dabei ist ∂B die Oberfläche des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$.

60. Zeigen Sie, dass der Rotor und die Divergenz eines planaren Vektorfeldes $\mathbf{v} = (P, Q)$ im Punkt S als “Flächenableitungen” interpretiert werden können: Es sei D_R die Kreisscheibe mit Radius R und Zentrum S . Dann ist
- (a) die Wirbeldichte in S durch

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\oint_{\partial D_R} P dx + Q dy}{\iint_{D_R} dA}$$

- (b) und die Quellendichte in S durch

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\oint_{\partial D_R} -Q dx + P dy}{\iint_{D_R} dA}$$

gegeben.

Hinweis: Satz von Gauß in der Ebene in Tangenten- bzw. Normalenform.

61. Berechnen Sie direkt und mittels eines geeigneten Integralsatzes das Oberflächenintegral

$$\Phi := \oiint_{\mathcal{F}} \vec{K} \cdot \vec{n} dA$$

des Vektorfeldes $\vec{K} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$ für die geschlossene Oberfläche des Bereiches

$$\mathcal{B} : y^2 + z^2 \leq 1 - x, \quad x, y, z \geq 0.$$

Der Normalvektor $\vec{n}$ ist nach außen orientiert.