Zusatzblatt 01 (Vorbereitung für Test 1)

Aufgabe Z01-01

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{0}) = 0$ sind für $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ gegeben durch:

$$\text{(a) } f(x,y) = \frac{x^2y^2}{y^2+x^4}, \qquad \text{(b) } f(x,y) = \frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{y^2+x^4}, \qquad \text{(c)} f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

(1) Zeigen Sie: f ist an der Stelle $\boldsymbol{x}^0 = \mathbf{0}$ stetig.

(2) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}).$$

(3) Berechnen Sie an der Stelle $\boldsymbol{x}^0 = \mathbf{0}$ alle normierten Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(\mathbf{0}), \qquad |\boldsymbol{n}| = 1.$$

(4) Ist f an der Stelle $\mathbf{0}$ total differenzierbar?

Aufgabe Z01-02

Die Temperatur einer in der x,y–Ebene liegenden Platte wird durch $T(x,y)$ gegeben. Berechnen Sie im angegebenen Punkt $\vec{x}_0$ die Temperaturänderung (normierte Richtungsableitung) in einer mit dem Winkel φ gegen die x–Achse geneigten Richtung. Was sind die extremalen Änderungen und für welche φ werden sie erreicht? Berechnen Sie die Isothermen (Kurven gleicher Temperatur in der x,y–Ebene). Skizzieren Sie das Gradientenfeld.

$$T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2+2x+y^2}}, \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe Z01-03

Bestimmen Sie die Taylorreihen-Entwicklung von

$$V(\mathbf{r}) := \frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{R}\|_2}, \qquad \text{wobei } \mathbf{r} = (x,y,z) \text{ und } \mathbf{R} = (X,Y,Z) \neq \mathbf{0} \text{ fest}$$

um den Ursprung $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ bis einschließlich Terme 2. Ordnung. Schreiben Sie die Entwicklung in Komponentenform bzw. in Vektor/Matrixform.

Zusatz: Physikalische Interpretation.

Aufgabe Z01-04

Entwickeln Sie

$$(a) \quad f(x,y) = \frac{e^x e^y}{1+x+y}, \qquad (b) \quad f(x,y) = e^x \cos y.$$

in eine Taylorreihe um den Nullpunkt.

Restgliedabschätzung für Punkte aus einer geeignet gewählten R-Kugel um den Ursprung.

Konvergenzbetrachtung (punktweise, absolut, bedingt, gleichmäßig).

Aufgabe Z01-05

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und ihren Typ für die folgenden Funktionen

(a) $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y), \quad 0 \leq x, y \leq 2\pi$

(b) $f(x,y) = 3x^2 - 2(y+1)x + 3y - 1$

(c) $f(x,y) = x^3 + x^2 - 6xy + y^2 + x + 4y$

Untersuchen Sie weiters die obigen Funktionen auf Konvexität und Konkavität.

Aufgabe Z01-06

Untersuchen Sie, ob durch die Gleichungen

$$x + y - \sin z = 0, \qquad e^x - x - y^3 = 1$$

in einer Umgebung von $x = 0$ zwei Funktionen $y(x)$, $z(x)$ mit $y(0) = z(0) = 0$ definiert werden und ob sie, wenn dies der Fall ist, bei $x = 0$ lokale Extrema besitzen.

Aufgabe Z01-07

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v^2 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1 \end{aligned}$$

durch positive Funktionen $u(x,y)$, $v(x,y)$ aufgelöst werden kann und berechne die partielle Ableitungen von u und v.

Aufgabe Z01-08

Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion

$$f(x,y,z,w) = xy + xz + xw + yz + yw + zw$$

unter den Nebenbedingungen

$$x + y + z + w = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 6.$$

(Vergessen Sie nicht die Voraussetzungen zu überprüfen.)

Aufgabe Z01-09

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = \pm\pi \\ x^k|x| & \text{für} \; -\pi < x < \pi \end{cases} \quad , \quad f(x \pm 2\pi) = f(x),$$

in eine Fourierreihe, wobei $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe Z01-10

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < \tau \\ \sin(x) & \text{für } \tau < x < T \end{cases} \quad , \quad f(x \pm 2T) = f(x),$$

in eine Fourierreihe, wobei $0 < \tau < T \leq \frac{5\pi}{2}$.

Konvergenzbetrachtung (punktweise, gleichmäßig).

Bestimmen Sie den Klirrfaktor in Abhängigkeit von τ und T.

Aufgabe Z01-11

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{x}{2}) & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin(\frac{x}{2}) & \text{für } -\pi < x < 0 \end{cases} \quad , \quad f(x \pm 2\pi) = f(x),$$

in eine Fourierreihe und bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.