10. Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx$$

und interpretieren Sie das Integral geometrisch.

11. Berechnen Sie

$$\iiint\limits_B x \, dx dy dz,$$

wobei der Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ begrenzt wird durch die *Flächen*

$$y = x^2, \qquad y = x + 2, \qquad 4z = x^2 + y^2 \qquad \text{und} \qquad z = x + 3.$$

Hinweis: Skizzieren Sie den Grundriss (Projektion in die XY-Ebene).

12. Ein *Kugelausschnitt* $K(R, \Theta)$ einer Kugel mit Radius R ist die Menge aller Punkte in der Kugel mit Polabstand(swinkel) $0 \leq \theta \leq \Theta$.

   (a) Berechnen Sie das Volumen von $K(R, \Theta)$ für $0 \leq \Theta \leq \pi$.

   (b) Berechnen Sie den Schwerpunkt[2] von $K(R, \Theta)$ für $\Theta = \pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ und π.

   (c) Geben Sie das Integral für die z-Komponente des Schwerpunkts einer Kugel mit Radius R, deren oberer Teil (Punkte mit z-Koordinaten $0 \leq a \leq z \leq R$) entfernt wurde, an. Es geht hier um die Aufstellung der Integrale mit den korrekten Grenzen und nicht um das Ausrechnen. Benützen Sie dazu einmal Kugelkoordinaten und dann Zylinderkoordinaten.

13. Bestimmen Sie das Volumen des Bereichs begrenzt durch die Oberfläche

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = z\left(x^2 + y^2\right).$$

Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten. Eine Skizze des Profils dieses Rotationskörpers könnte hilfreich sein.

Apropos: Auf `http://mathworld.wolfram.com/FoxTrotSeries.html` können Sie auch ein Dreifach-Integral finden. Interpretieren Sie dieses Integral.

[2] Die Formeln sind: $\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_B x dx dy dz$, $\bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_B y dx dy dz$ und $\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_B z dx dy dz$, wobei V das Volumen von B ist.