14. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}$ für das Vektorfeld $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -x^2y \\ xy^2 \end{pmatrix}$ für die Kurve
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 4 \right\}.$$

15. Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral
$$\int_C \Big(3x^2(1+y^2)z\,dx + 2x^3yz\,dy + x^3(1+y^2)\,dz \Big)$$
wegunabhängig ist. Bestimmen Sie die Potentialfunktion ϕ des Vektorfeldes $\mathbf{V}$ im obigen Integral. Berechnen Sie den Wert des Integrals entlang eines Weges von $(0,0,1)$ nach $(2,4,1)$ und mit Hilfe der Potentialfunktion ϕ.

16. Es sei die folgende Fläche im Raum gegeben:
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \cosh(x) \end{pmatrix} : -2 \le x \le 2,\ -10 \le y \le 10 \right\}.$$
    (a) Berechnen Sie die Fläche von S.
    (b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\iint\limits_S \frac{xy}{z}\,do$, wobei $z = \cosh(x)$ ist.

17. Gegeben ist das Vektorfeld $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,do$ für die folgenden Flächen S im Raum:
    (a) Paraboloid $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$, wobei der Normalvektor nach “oben” weist.
    (b) Kreisscheibe $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, wobei der Normalvektor nach “unten” weist.
    (c) Schiefe Ebene $x + y + z = 1$ im positiven Oktanten (d.h., $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$), wobei der Normalvektor nach “oben” weist.

18. Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie die Identität
$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle.$$
Folgern Sie daraus, dass
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \qquad \text{und} \qquad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta,$$
wobei θ der von den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ eingeschlossene Winkel ist.
Warum kann das für die Berechnung von Oberflächenintegralen nützlich sein? Welchen Namen hat die obige Identität?