19. Berechnen Sie mittels des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene das Kurvenintegral

$$\oint_{\partial G}\Big(2y\cosh y+(x^2-y^2)\sinh y\Big)\cos x\,dx+\Big(2x\cos x+(x^2-y^2)\sin x\Big)\cosh y\,dy$$

über den Rand ∂G des Gebietes $G=\{(x,y):0\le x\le 2,-\sin x\le y\le\cos x\}$.

20. Gegeben sei das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}=(P,Q)$ mit $P=-y$ und $Q=x+\lambda(1-x^2)$. Das Gebiet G wird durch die folgende Kardioide (in Polarkoordinaten) begrenzt:

$$r=\frac{3}{2}(1-\cos\theta)\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Zirkulation $\oint_{\partial G}P\,dx+Q\,dy$ von $\mathbf{v}$ entlang des Randes von G.

(b) Bestimmen Sie den Fluss $\oint_{\partial G}-Q\,dx+P\,dy$ von $\mathbf{v}$ durch den Rand von G.

(c) **(Zusatz)** Veranschaulichen Sie das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ für verschiedene λ unter Verwendung geeigneter Software.

21. Gegeben sei der kegelförmige Körper $K=\{(x,y,z):0\le z\le 5-\sqrt{x^2+y^2}\}$. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{F}=(x,y+1,z+2)$ durch die Oberfläche ∂K auf zwei verschiedene Weisen; d.h., berechnen Sie das Flussintegral $\oiint_{\partial K}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{o}$

(a) direkt durch Parameterisierung der Oberfläche ∂K und

(b) durch Anwendung eines geeigneten Integralsatzes.

22. Eine Seifenblase habe den Kreis $\partial K=\{(x,y,0):x^2+y^2=R^2\}$ als Öffnung (Rand) und sei nach oben in positiver z-Richtung aufgeblasen, wobei die genaue Form der Oberfläche S nicht bekannt sei.

Bestimmen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\mathbf{F}=(y,z,x)$ durch S. Der Normalvektor auf S weise nach "oben".

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{F}$ *quellenfrei* ist. Daher kann man ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ finden mit $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{v}$. Bestimmen Sie eine konkrete Lösung $\mathbf{v}$. Verwenden Sie einen geeigneten Integralsatz um Φ mit Hilfe des Wegintegrals $\oint_{\partial K}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}$ zu ermitteln.

(b) Zeigen Sie, durch Anwendung eines geeigneten Integralsatzes, dass Φ durch den Fluss $\iint_K\mathbf{F}\cdot d\mathbf{o}$ von $\mathbf{F}$ durch die von ∂K berandete Kreisscheibe berechnet werden kann. Bestimmen Sie dieses Integral und damit Φ.

Verschiedenes: Online-Resource für Darstellungen von ebenen Vekorfeld:

http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-02t-electricity-and-magnetism-spring-2005/visualizations/vectorfields1/

Bitte Umblättern

23. **(Alte Klausuraufgabe)** Gegeben ist das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) = (1, y, 0).$$

(a) Es sei $K = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 3\}$ ein Würfel. Parametrisieren Sie die sechs Seitenflächen des Würfels und geben Sie dazu jeweils einen Normaleneinheitsvektor und Flächenelement do an.

(b) Berechnen Sie direkt (d.h., ohne Anwendung eines Integralsatzes) den Fluss $\oiint_{\partial K} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{o}$ von $\mathbf{v}$ durch die Oberfläche ∂K von K. (Hinweis: Der Beitrag einiger der sechs Seiten ist 0.)

(c) Berechnen Sie $\nabla \cdot \mathbf{v}$ und berechnen Sie nun das Integral aus (b) mit Hilfe des Satzes von Gauß.

Klausurtermine:

04.05.2015 (18:15 bis 20:15; HS P1; bitte im TUGonline zur Prüfung anmelden)

19.06.2015 (14:30 bis 16:45; HS i13; alle Teilnehmer der ersten Prüfung sind automatisch zu dieser Prüfung angemeldet)