Übungen aus Mathematik I M WM VT

1 Einführung

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen L der folgenden Gleichungen:

   a) $\sqrt{2x^2-1}+x=0$ b) $\sqrt{4x^2}-x+2=0$
   c) $\sqrt{2x^2+3}+x=0$ d) $\sqrt{x^2-2x+1}+x-1=0$
   e) $\sqrt{x^2-x-6}-\sqrt{x^2-6x+5}=0$ f) $\sqrt{9x^4}+12x+9=0$
   g) $x-\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-1}=0$ h) $\sqrt{x^4}=2|x|-1$

2. Beweisen Sie für $a,b\in\mathbb{R}$:

   a) $a^2<b^2 \Leftrightarrow |a|<|b|$ b) $|a|<b \Leftrightarrow -b<a<b,\ b>0$
   c) $|a|>b \Leftrightarrow a<-b$ oder $a>b$ d) $2|ab|\le a^2+b^2$
   e) $|a+b|+|a-b|\ge|a|+|b|$ f) $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\le\sqrt{|a-b|}\quad(a,b\ge 0)$
   g) $|a+\frac{1}{a}|\ge 2\quad(a\ne 0)$ h) $\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\quad(a,b\ge 0)$

3. Beweisen Sie für $a,b,c,d\in\mathbb{R}$:

   $(ab+cd)^2\le(a^2+c^2)(b^2+d^2)$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmengen L der folgenden Ungleichungen:

   a) $3-x^2+2x>0$ b) $x<\dfrac{9}{6-x}$ c) $x^2+6x>7$
   d) $x+3>\dfrac{x+18}{3x-2}$ e) $x<\dfrac{4}{4-x}$ f) $3+2x\le\dfrac{3}{2-x}$
   g) $\dfrac{x}{x-2}>\dfrac{x-3}{3x-1}$ h) $x^3>2x^2-x$ i) $|x-1|+x\le 5$
   j) $|x-2|-2x\ge 11$ k) $|x-1|+|x+3|\le 4$ l) $|x-2|+|x+3|\ge 5$
   m) $\dfrac{(x+2)|x^2-1|}{x+1}>4$ n) $|x-1|<\dfrac{x^2-11x}{x+16}$ o) $\dfrac{8(x-1)}{x^2}<|3x-3|+x-1.$

5. Für positive a,b,c,d mit $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ zeige man: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

6. Man skizziere in $\mathbb{R}^2$ die Menge der Punkte (x,y), für die die folgenden Ungleichungen gelten:

   a) $1<x^2+y^2\le 4$ und $|x-y|<1$
   b) $x^2y^2<1$ und $x^2-y^2<1$
   c) $x^2+xy+1>1$ und $x^2\le y\le x^4$

7. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z\in\mathbb{C}$, sowie z^2 und $|z|^2$ aus

   a) $\dfrac{1-i}{1-2i}z=\dfrac{2+2i}{1+3i}$ b) $z=\dfrac{i+3}{2i-4}$ c) $z=(2+i)^2+7-3i$

d) $z = \dfrac{(1+2i)[(4+3i)^2+1-22i]}{(2-i)^2-2+5i}$ e) $\left[\dfrac{1-i}{2+3i} - \dfrac{6+2i}{1+i}\right] z = \dfrac{3-i}{3+i}$

f) $\left[\dfrac{1-2i}{3+i} + \dfrac{6-i}{1+5i}\right] \bar{z} = \dfrac{3-6i}{1+i}$ g) $\dfrac{1}{4}\,\dfrac{3-i}{1-2i}\,\bar{z} = \dfrac{i-1}{i+\sqrt{3}}$

8. Bestimmen Sie z aus den Gleichungen:

a) $2z + 3i\bar{z} - 5\bar{z} = 5(i-1)$ b) $\frac{5}{2}z - 3iz + \frac{1}{2}\bar{z} + 2i\bar{z} = 7+5i$
c) $-3z + \bar{z} - 2i\bar{z} = 2i$

9. Bestimmen und skizzieren Sie die durch folgende Bedingungen festgelegten Teilmengen $M \subseteq \mathbb{C}$:

a) $|z+1| - \text{Re } z \geq 2$ b) $(4\text{Re } z)^2 - |z|^4 \geq 0$ c) $\text{Re } z \leq |z|^2$
d) $\text{Im } \frac{z-1}{z+i} \leq 0$ e) $\text{Re}\frac{z-1}{z+i} < 0$ f) $1 < |z+i| \leq 2$
g) $(2+i)z + (2-i)\bar{z} - 2 = 0$ h) $z\bar{z} + 2\text{Re}[(1+i)z] - 2 = 0$
i) $3z^2 - 10z\bar{z} + 3\bar{z}^2 + 16 = 0$ j) $z^2 - 5z\bar{z} + 2\bar{z}^2 + 8 = 0$
k) $\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 2$ l) $\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1$
m) $|z-i| \leq |z-2+i|$ und $|\text{Arg}(z+2)| < \frac{\pi}{4}$ n) $|\text{Arg } z| < \frac{\pi}{4}$ und $2\text{Re } z + \text{Im } z < 1$
o) $|\text{Arg}(1+z)| < \frac{\pi}{3}$ und $|\text{Arg}(1-z)| < \frac{\pi}{3}$ p) $-\frac{3\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-i) \leq -\frac{\pi}{4}$ und $\text{Im } z \leq 0$
q) $|z-1| \leq \text{Im } z + 1$ r) $i\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right) < \frac{1}{\text{Im } z}$ $(\text{Im } z \neq 0)$
s) $4z\bar{z} - 4\text{Re}[(2-i)z] + 1 \geq 0,$ t) $4z\bar{z} - 4\text{Re}[(2-i)z] + 5 \geq 0,$

10. Man gebe alle 7-ten Einheitswurzeln mittels Real- und Imaginärteil an und zeichne sie in der Gaußschen Zahlenebene ein.

11. Man gebe sämtliche n-ten Wurzeln von z an (und zwar sowohl in Polarkoordinaten als auch mit Real- und Imaginärteil) für

a) $z = 3-4i\,,\ n=2$ b) $z = 1-i\,,\ n=3$ c) $z = 2-3i\,,\ n=5$
d) $z = 1+i\,,\ n=7$ e) $z = 4(-\sqrt{3}+i)\,,\ n=6$

2 Folgen und Reihen

12. Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, und geben Sie ein $N \in \mathbb{N}$ an, sodass $|a_n - a| < 10^{-3}$ für $n > N$ gilt; hierbei ist $a_n =$

a) $\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}$; b) $\frac{1}{4^n}$; c) $\dfrac{n^{\frac{1}{3}} \sin n}{\sqrt{n+1}}$; d) $\dfrac{6n-2}{3n+7}$.

13. Bestimmen Sie, falls möglich, den Grenzwert a der Folge $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$,

a) $a_n = \dfrac{n^2+7n-3}{2n^2-5n+6}$; b) $a_n = \dfrac{3n^3-1}{4n^2+2}$; c) $a_n = \dfrac{n+1}{2n^2+1}$.

14. Unter Verwendung von

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

bestimme man die Grenzwerte der Folgen

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n, \quad \left(1+\frac{2}{n}\right)^n, \quad \left(1+\frac{p}{n}\right)^n, \; p \in \mathbb{R}$$

15. Bestimmen Sie, soweit möglich, den Grenzwert a der Folge $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$; dabei ist a_n gegeben durch

    a) $\frac{n}{3^n}$; b) $\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$; c) $(\frac{1}{3}\sqrt{3})^n$; d) $\cos n\pi$; e) $\sin n\pi$; f) $\frac{4}{n}+\frac{2^n}{n!}$; g) $2+\frac{\cos n\pi}{n^2+1}$;

    h) $\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$; i) $\sqrt[3]{1-n^3}+n$; j) $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

    k) $\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}$; l) $\frac{1}{\sqrt{n+5}}\binom{n}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{n\pi}{2}$.

16. Man berechne:

    a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})$, $(a \in \mathbb{R},\ n \geq |a|)$, b) $\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}})$,

    c) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$, d) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)$.

17. Ist die Folge $\{x_n\}$, mit $x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ konvergent?

18. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

    a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2}{n^4+1}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1]}$, d) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$,

    e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$, f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}3^n$, g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\,3^n}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

    i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$, j) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+n}{3^n}$.

    Hinweis zu h): Man verwende das Wurzelkriterium und das Ergebnis von Bsp. 14.

19. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie ihre Summe; dabei ist a_n gegeben durch

    a) $\frac{1}{4n^2-1}$, b) $(-1)^n\frac{4}{3^{n-2}}$, c) $\frac{1}{2^n}$, d) 3^n, e) $\frac{n-1}{n!}$.

20. Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz bzw. Divergenz; dabei ist a_n gegeben durch

    a) $\frac{n!}{n^n}$; b) $\sqrt[n]{n}$; c) $\frac{n}{n^2-3n+5}$; d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

    e) $\frac{3\cdot(-1)^n}{\sqrt{n^2+n+1}}$ f) $\frac{(n+1)^n}{(n^2+1)(n+1)!}$; g) $(1-\sqrt{2}i)^n(\frac{n-2}{n-1})^{n^2}$; h) $(-1)^n\frac{n}{n+1}$;

i) $\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$; j) $\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}$; k) $\frac{1}{n^2+\pi}$; l) $\frac{(-1)^n \cos n\pi}{n}$;

m) $\frac{n^n}{2^n \cdot n!}$; n) $(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)$; o) $\frac{n^2+1}{3^n}$; p) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$;

q) $\frac{n^2-5n+2}{n^4}$; r) $\sin^2\left[\pi(n+\frac{4}{n})\right]$; s) $n\left[1-(1-\frac{1}{3n})^9\right]$; t) $\frac{1}{\pi^n}$;

u) $\frac{k^{2n}}{n!}$, $k \in \mathbb{N}$; v) $\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$.

21. Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

alternierend ist. Ist sie auch konvergent?

3 Funktionen in einer Variablen

22. Man untersuche die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in $[-\pi,\pi]$:

$$\text{a)}\quad f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{falls } x\neq 0\\ 0 & \text{falls } x=0\end{cases}$$

$$\text{b)}\quad f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & \text{falls } x\neq 0\\ 0 & \text{falls } x=0\end{cases}$$

$$\text{c)}\quad f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & \text{falls } x\neq 0\\ 0 & \text{falls } x=0\end{cases}$$

23. Man untersuche, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig sind:

$$\text{a)}\quad f(x)=\begin{cases}-x & \text{falls } x<0 \text{ oder } x>1\\ x^2 & \text{sonst}\end{cases}\qquad \text{(Skizze!)}$$

$$\text{b)}\quad f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1 & \text{falls } -1\leq x\leq 0\\ 1-x & \text{sonst}\end{cases}\qquad \text{(Skizze!)}$$

c) $f(x)=x-[x]$ (Skizze!)

d) $f(x)=[x]+|x|$ (Skizze!)

$[x]:=$ größte ganze Zahl $\leq x$

24. Man gebe, falls möglich, stetige Ergänzungen der folgenden Funktionen in den jeweils angegebenen Punkten an:

a) $f(x)=\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$, $\xi_{1,2}=\pm 2$, b) $f(x)=\frac{3x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $\xi=1$,

$$\text{c)}\quad f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{falls } -2\leq x<1,\\ -2x+4 & \text{falls } 1<x<3,\\ x-2 & \text{falls } 3<x\leq 4,\end{cases}\qquad \xi_1=1,\ \xi_2=3.$$

4 Die Differentialrechnung

25. Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^7 + 6x^3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^5} - \sqrt{x} + \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$, $x \neq 0$, b) $f(x) = x^{\frac{7}{9}}\left(x^3 + \frac{x-1}{x+1}\right)$, $x > 0$,

c) $f(x) = \ln(x \ln x)$, $x > 1$, d) $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} + 1}$, e) $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $0 < x < 1$.

26. Differenzieren Sie folgende Funktion $f(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich von f und f' an:

a) $\sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}$ b) $\sqrt{a^2 + x^2}$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ c) $\sqrt[5]{(5x-2)^4}$

d) $\frac{3x-6}{x^2 - 4x + 5}$ e) $(x-1) \cdot |x-1|$ f) $\frac{x^2|x+1|}{|x-2|}$

27. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen differenzierbar:

a) $f(x) = |1 - e^x|$, b) $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$,

c) $f(x) = 2 + |\cosh x - 2|$, d) $f(x) = |x+1|\sqrt[4]{|x-1|}$.

28. Man bestimme die Umkehrfunktion zu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & \text{falls } x \leq 2 \\ -x + 4 & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

29. Zeigen Sie mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x / x^\alpha = 0$ $(\alpha > 0)$ b) $\lim\limits_{x \to 0+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{1}{2}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{(\pi/2 - \arctan x)} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{-x}\sin(1-x)}{x + \cos x} = 0$ e) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\tan(5x)}{\tan x} = \frac{1}{5}$ f) $\lim\limits_{x \to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$ h) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4x - 5} = \frac{7}{6}$ i) $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)\tan\left(\frac{x\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln|\sin x|}{\ln|\tan x|} = 1$ k) $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x^k} e^{1/x} = 0$, $k = 0, 1, 2$

30. Man berechne die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$, c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x}$,

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$, e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}$, f) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$,

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$, h) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}$, i) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$,

j) $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\frac{1}{x}}$, k) $\lim\limits_{x \to 0}(\cot x)^{\sin x}$, l) $\lim\limits_{x \to \infty}\left[x - \sqrt{(x-a)(x-b)}\right]$,

m) $\lim\limits_{x \to 0+}(e^x - 1)^x$, n) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$, o) $\lim\limits_{x \to 1}(\ln x)\ln(1-x)$,

p) $\lim\limits_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, q) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)$.

31. Für ein drehzylindrisches Gefäß bestimme man die Abmessungen so, dass das Volumen V bei vorgegebener Oberfläche S maximal, bzw. die Oberfläche S bei vorgegebenem Volumen V minimal wird.

32. Für welchen Punkt (a, b) im 1. Quadranten auf der Parabel $y = 4 - x^2$ besitzt das Dreieck, das von der Tangente in (a, b) an die Parabel und den Koordinatenachsen begrenzt wird, minimalen Flächeninhalt ?

33. Auf ein Blatt Papier mit 2 m^2 Flächeninhalt soll ein Poster gedruckt werden, sodass der Rand oben und unten 21 cm und links und rechts 14 cm breit ist. Wie sind Länge und Breite zu wählen, sodass die bedruckte Fläche maximal wird ?

34. Die Funktion $y(h) = h(a^2 + h^2)^{-3/2}, (h \geq 0)$, gibt die Beleuchtungsstärke der Lampe B im Punkt A an. In welcher Höhe h ist B zu befestigen, damit es in A möglichst hell wird?

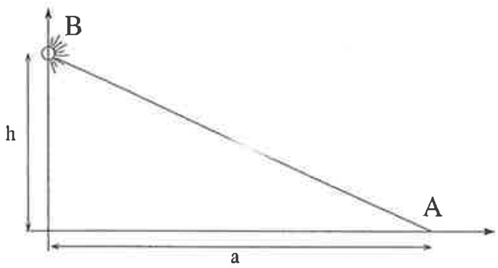

Abbildung 1: Zu Bsp. 34

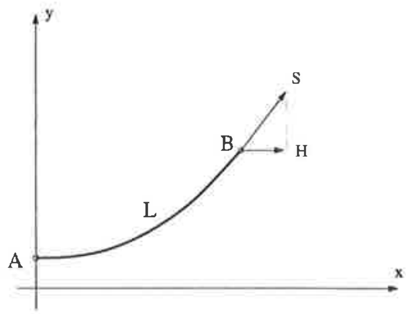

Abbildung 2: Zu Bsp. 38

35. Man führe für die folgenden reellen Funktionen die Kurvendiskussion durch (Skizzen!):

a) $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$, b) $y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$, c) $y = x^3 - \frac{48}{x}$,

d) $y = x^2 e^x$, e) $y = ae^{-b^2x^2}$, $a > 0$, $b > 0$.

36. Man diskutiere die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$, b) $f(x) = (\ln x)^3 - 3 \ln x$, c) $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}$,

d) $f(x) = (x+1)^3 \sqrt[3]{x^2}$, e) $f(x) = (x^2 - 1)e^{-|x|}$, f) $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$,

g) $f^2(x) = \frac{1+x}{(2+x)^2}$, h) $f(x) = \frac{a}{x-1} - \frac{b}{x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ fest , $0 < a < b$,

i) $f(x) = u(x)$ mit $u = \frac{d}{dx}|x^2 - 2x|$, j) $f(x) = \frac{1}{x^2 + ax + b}$, $a^2 - 4b > 0$, $b \neq 0$.

37. Führen Sie für die angegebenen Funktionen folgendes Programm durch:
   i) Definitionsbereich D, Stetigkeitsbereich S;
   ii) Grenzwerte an den Rändern, stetige Ergänzbarkeit;
   iii) Asymptoten: $y_\pm$ für $x \to \pm\infty$ (falls definiert);
   iv) Monotonieintervalle, relative und absolute Extrema;
   v) Skizze.

a) $f(x) = x - 2\sqrt{x^2+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$ c) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x^2}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ in $[-2,3]$ e) $f(x) = \dfrac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\alpha)^2/2\tau^2\}$ $(\tau > 0)$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + \ln|x-1|$ g) $f(x) = \arctan \dfrac{x}{x-2}$ h) $f(x) = \dfrac{8x^3}{(3x-2)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$ j) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ k) $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x^2-4x+5}$

l) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ m) $f(x) = \ln(4 + x - \sqrt{x^2-4})$ n) $f(x) = e^{1/x}(x+2)$

38. Hängt ein Seil nur unter der Last seines Gewichtes g, so beschreibt es eine *Kettenlinie*:

$$y(x) = b + a\cosh\left(\frac{x+c}{a}\right) \ , \quad a > 0\ .$$

Die Spannkraft S ist in jedem Punkt des Seiles tangential gerichtet, ihre Horizontalkomponente ist über die gesamte Länge des Seiles hinweg konstant: $H = ag/L$.
a) Man rechne nach: $y(x)$ genügt der Differentialgleichung $ay'' = \sqrt{1+(y')^2}$.
b) Ein Seil soll zwischen den Punkten A(0 m, 100 m) und B(300 m, 192.8 m) hängen, sodass es in A horizontal einmündet (siehe Abb. 2). Bestimmen Sie zunächst b und c. Stellen Sie dann eine Gleichung für a auf und lösen Sie sie mit dem Newton-Verfahren.

39. Man bestimme das Taylorpolynom 5. Grades von $f(x) = \tan x$ an der Stelle $x_0 = 0$. (Hinweis: Man benutze für $y = \tan x$ die Gleichung $y' = 1 + y^2$).

40. Man entwickle die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen x_0 in eine Taylorreihe:

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-x-2}$, $x_0 = 0$, b) $f(x) = x^3 \ln x^3$, $x_0 = 1$,

c) $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$.

41. Ersetzen Sie folgende Funktionen durch ihre Taylorpolynome $P_n(x, x_0)$ des angegebenen Grades, und schätzen Sie den Fehler im angegebenen Bereich ab:

a)	$f(x) = (1+x^2)\arctan x$	durch	$P_2(x,1)$	in	$\lvert x-1\rvert \le \frac{1}{10}$
b)	$f(x) = \ln(1+x^2)$	durch	$P_2(x,0)$	in	$\lvert x\rvert \le \frac{1}{10}$
c)	$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\cos x\right)$	durch	$P_2(x,\pi)$	in	$\lvert x-\pi\rvert \le \frac{1}{100}$
d)	$f(x) = \exp\{\sin^2 x\}$	durch	$P_2\left(x, \frac{\pi}{4}\right)$	in	$\left\lvert x - \frac{\pi}{4}\right\rvert \le \frac{1}{10}$
e)	$f(x) = \exp\{\exp x\}$	durch	$P_4(x,0)$	in	$\lvert x\rvert \le \frac{1}{10}$

42. Für kleinere Beträge von x benutzt der Ingenieur oft die Näherung:
$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R}$.
Schätzen Sie für folgende α den Fehler im Bereich $|x| \le 10^{-2}$ ab:

a) $|\alpha| < 1$, b) $\alpha = \frac{1}{2}$, c) $\alpha = -\frac{1}{2}$.

43. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren folgende Potenzreihen? Man untersuche auch das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(4n+5)5^n}} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3} \left(x+\frac{3}{2}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n-1}(x-13)^n$

d)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-e)^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} x^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{n+1}} x^n$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}} x^n$

44. Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen, und skizzieren Sie den Konvergezbereich:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{n^2} n^{-n^2}(x-1)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} n! 2^{-n}(x+2)^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(x+1)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n}(n^4+1)}{n} x^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n x^n, \; a \in \mathbb{R}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n, \; a \in \mathbb{R}$

45. Man bestimme den Konvergenzbereich der Reihe

$$1 + ax + b^2x^2 + a^3x^3 + b^4x^4 + \cdots \,, \; 0 < a < b \,.$$

5 Die Integralrechnung

46. Man ermittle die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int \left(x^3 + \frac{2}{x} + e^{2x} - \sinh x\right) dx,$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}},$ c) $\int \tanh \alpha x \, dx,$

d) $\int x^2 e^{-x^3} \, dx,$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}},$

g) $\int 2^{-x} \coth(2^{1-x}) \, dx,$ h) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}, \; a > 0,$ i) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2+x+1}},$

j) $\int x\sqrt{1+x} \, dx,$ k) $\int 3^{\sqrt{2x+1}} \, dx.$

47. Lösen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration:

a) $\int x \arctan x dx,$ b) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx,$ c) $\int \sin^2 y \, dy,$

d) $\int x \ln x dx,$ e) $\int \ln x \, dx,$ f) $\int e^{at} \cos bt \, dt \quad (a \cdot b \neq 0),$

g) $\int \cosh at \cdot \cos bt \, dt \quad (a \cdot b \neq 0).$

48. Lösen Sie folgende Integrale durch geeignete Substitution:

a) $\int \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)dx$, b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$, c) $\int \frac{dt}{t\sqrt{t-9}}$,
d) $\int \frac{dy}{e^{6y}+4e^{-6y}}$, e) $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}dt$, f) $\int \frac{4x}{(1-x^2)^2}\,dx$.

49. Lösen Sie folgende Integrale:

a) $\int \frac{dy}{\sqrt{y}+\sqrt{y+1}}$, b) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$, c) $\int \frac{\tanh t}{2\sqrt{\cosh t-1}}dt$, d) $\int \frac{y}{\cos^2 y}dy$,
e) $\int t^2 \ln t\, dt$, f) $\int \tan^2 t\, dt$, g) $\int \ln^2 x\, dx$, h) $\int 2x^2 \cosh 2x\, dx$,
i) $\int \arctan\sqrt{\frac{y}{3}}\,dy$, j) $\int \frac{x\ln x}{(1+2\ln x)^2}\,dx$, k) $\int (x^2+1)^{21}x^3 dx$, l) $\int 3^y dy$,
m) $\int x^2 e^{x/2}dx$, n) $\int (\cos x)\sqrt{\sin x}\, dx$, o) $\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$, p) $\int \frac{dy}{y\ln y}$.

50. Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\int e^x \sin 2x\, dx$, b) $\int (\sin x+\sin^3 x)\, dx$, c) $\int \arctan x\, dx$,

d) $\int \operatorname{arsinh} x\, dx$, e) $\int x^2 \ln x\, dx$, f) $\int \frac{x^3-2x}{x+1}\, dx$, g) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$.

51. Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen u, v forme man das folgende Integral um:

$$\int (u(x)v''(x)-v(x)u''(x))\, dx.$$

52. Es sei $I_m^n(x) := \int x^m(\ln x)^n\, dx$. Man beweise die Rekursionsformel

$$I_m^n(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{1}{m+1}\, I_m^{n-1}$$

und berechne dann damit das Integral $\int x^3(\ln x)^2\, dx$.

53. Man zeige, dass $I_n := \int x^n \cosh x\, dx$ und $J_n := \int x^n \sinh x\, dx$ den folgenden Rekursionsbeziehungen genügen:

$$I_n = x^n \sinh x - nJ_{n-1}\,, \qquad J_n = x^n \cosh x - nI_{n-1}\,.$$

54. Man berechne folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int x^3 \sin 2x\, dx$, b) $\int 3xe^{x^2/2}\, dx$, c) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$,
d) $\int \frac{dx}{4-x^2}$, e) $\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\, dx$, f) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$,
g) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, h) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\, dx$, i) $\int \frac{dx}{1+x^3}$,

j) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$, k) $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$, l) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx,\ a,b>0$,

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{12x-2-9x^2}}\,dx$, n) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$, o) $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,dx$,

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tanh x}$, q) $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$, r) $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$,

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$, t) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

55. Berechnen Sie $\int f(x)\,dx$. Dabei ist $f(x)$ gegeben durch

a) $\dfrac{x^5+3x^4+5x^3+8x^2+4x+3}{(x^2+1)^2(x^2+2x+1)}$, b) $\dfrac{x^4+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$,

c) $\dfrac{3x^3-2x+5}{x^2-4x+3}$, d) $\dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+8}{x^3-x^2-x-2}$,

e) $\dfrac{6x+1}{(x^2-6x+18)^2}$, f) $\dfrac{5x^2-7x+6}{x^3-3x^2+4}$,

g) $\dfrac{4x^4+4x^3-2x^2-10x-6}{x^5+7x^4+16x^3+10x^2}$, h) $\dfrac{x^5+1}{x^2+x^3}$,

i) $\dfrac{x^2-3x+2}{(2x+5)(x^2-1)}$, j) $\dfrac{6x^2+x+3}{3x+5}$,

k) $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$.

Hinweis zu k): $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=x^4+1$.

56. Man löse

a) $y'=\dfrac{\cos x\,\sin y}{\cot y}$, b) $y'=\dfrac{x^3}{e^{2y}}$,

c) $xy'=y(3-x)$, d) $y'=\frac{x}{y}-\frac{x}{1+y}$.

57. Man integriere folgende Differentialgleichung durch Trennung der Variablen

$$x^2y^2y'-(1+x)(1+y)=0\,.$$

58. Man löse die folgenden Anfangswertaufgaben

a) $y'=xe^x\,,\ y(1)=3$, b) $y'=\dfrac{\cos x}{\cos^2 y},\ y(\pi)=\frac{\pi}{4}$,

c) $xy'-3y=0\,,\ y(-1)=-\frac{1}{2}$, d) $(1+x)y'=-3y\,,\ y(6)=7$.

59. Man bestimme alle Lösungen des Problems

$$xy'-3y=0\,,\ y(1)=1\,,\ y(-1)=-1/2.$$

60. Man berechne die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int\limits_0^\alpha [x]\,dx\ ,\quad \alpha > 0,$ b) $\int\limits_0^1 x^6(1-x)^{17}\,dx,$ (vgl. Bsp. d)),

c) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}},$ d) $\int\limits_0^1 x^n(1-x)^m\,dx\ ,\ n,m \in \mathbb{N},$

e) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x(1+\sqrt{1-x^2})},$ f) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0 \left(x\sqrt{1+2x} - x(x+1)\right)\,dx,$

g) $\int\limits_0^1 \sin^5 x\,dx,$ h) $\int\limits_\pi^{2\pi} \sin^5 x\ \cos x\,dx,$

i) $\int\limits_0^3 \sqrt{x^2+2x+5}\,dx,$ j) $\int\limits_3^5 \sqrt{x(3x-2)}\,dx.$

61. Man berechene den Flächeninhalt zwischen den folgenden Kurven und der x–Achse im Intervall $[0,10]$:

$$\text{a) } y = (x-1)(x^2-5x+6)\,, \qquad \text{b) } y = x\cos x.$$

62. Bestimmen Sie:

a) den Inhalt F der Fläche, die von den Kurven $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = 4x - x^2$ begrenzt wird.

b) den Inhalt F der Fläche, die von den Kurven

$$f_1(x) = \begin{cases} 4 & , \quad 3 \le x \le 19 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & , \quad x \ge 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

und $f_3(x) = \sqrt{x-3}$ begrenzt wird.

c) den Inhalt F der Fläche, die von den Kurven $f_1(x) = |\sin x|$, $f_2(x) = -1$ und den Geraden $x_0 = 0$ und $x_1 = 2\pi$ eingeschlossen wird.

63. Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, der bei der Drehung der Kurve $y = 1/(1+x^2)$ um ihre Asymptote entsteht.

64. Man berechne die Oberfläche des Rotationskörpers, der bei Drehung der Kurve $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$, um die x–Achse entsteht.

65. Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx,$ b) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

c) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}},$ d) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cot x\,dx$ (Cauchy'scher Hauptwert).

66. Man berechne die Fläche zwischen der Kurve $y = x\ln x$ und der x–Achse auf dem Intervall $[1,2]$ mit Hilfe der Formel von SIMPSON. Anschließend vergleiche man dieses Ergebnis mit dem exakten Wert.

67. Unter Verwendung der SIMPSON'schen Regel bestätige man die folgenden Resultate:

$$\text{a)} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\,dx \approx 1.0184 \quad (2L = 4)\,, \qquad \text{b)} \int\limits_{0}^{3} \sqrt{x^3+x+1}\,dx \approx 8.1587 \quad (2L = 6).$$

68. Man berechne die folgenden *elliptischen Integrale* (diese geben die Bogenlänge der Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{2}, b = 1$ an) mit Hilfe der Formel von SIMPSON für 2 bzw. 4 Teilintervalle:

$$\text{a) } I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt\,, \quad \text{b) } I = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt\,, \quad \text{c) } I = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt.$$

Man vergleiche die gewonnenen numerischen Werte mit der Näherungsformel

$$I \approx 2\pi\sqrt{3/2}.$$

6 Lineare Algebra - Teil 1

69. Der Schwerpunkt S eines Dreiecks PQR ist durch $\vec{s} = \frac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}$ gegeben; zeigen Sie, dass der Schwerpunkt die Schwerlinien (=Verbindungsgerade zwischen einem Eckpunkt und dem Halbierungspunkt der gegenüberliegenden Seite) im Verhältnis 1 : 2 teilt.

70. Gegeben sind $A(0,0,0)$, $B(5,0,0)$, $C(0,10,0)$, $D(3,4,5)$. Man berechne die Gleichungen der Seitenebenen und Seitenkanten des von A, B, C, D aufgespannten Tetraeders. Man berechne die Tetraederhöhen, die Gleichungen der Schwerlinien sowie deren Längen. Ferner berechne man die Flächeninhalte der Seitenflächen und das Volumen des Tetraeders. Berechne die Koordinaten des Schwerpunktes sowie den kürzesten Abstand gegenüberliegender Kanten.

71. Man schneide die drei Ebenen $\varepsilon_1 : x+y-z = 3$, $\varepsilon_2 : x+2y+5z = 8$ und $\varepsilon_3 : 2x-8y = -4$. Berechne die Gleichung der Schnittgeraden von ε_1 und ε_2 sowie die Winkel zwischen den Ebenen.

72. Man berechne

$$\text{a)} \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\8\\-5\end{pmatrix}\right].$$

73. Man berechne

$$\text{a)} \begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix}1 & 2\\\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\6 & 1 & -8\\5 & 2 & -13\end{vmatrix}, \quad \text{d)} \begin{vmatrix}a & 1 & 3\\-1 & 2 & a\\0 & 1 & 4\end{vmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

74. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g, h sowie die Gleichung der Ebene ε,die davon aufgespannt wird, in parameterfreier und Parameterform

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

75. Berechne den Abstand des Punktes $P(4, 5, 6)$ von der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

76. Berechne den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

77. Berechne die Gleichung der Ebene durch $A(1, 2, 3)$, $B(4, 2, 0)$ und $C(3, 1, 1)$ in parameterfreier und Parameterform und den Abstand des Punktes $P(10, 15, 200)$ von dieser Ebene.

78. a) Gegeben sind die Punkte $A(3, 1, 4)$, $B(0, 2, -3)$, $C(3, -1, 3)$. Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist, und berechnen Sie die Länge der Hypotenuse.
b) Gegeben sind die Punkte $A(1, -1, 0)$, $B(3, 1, 4\sqrt{2})$, $C(\sqrt{2}+1+\sqrt{10}, \sqrt{2}-1-\sqrt{10}, 4)$. Zeigen Sie, dass das zugehörige Dreieck ABC gleichschenklig ist, und berechnen Sie die Winkel des Dreiecks.

79. Gegeben sind die festen Punkte $Q_1(1, 0)$ und $Q_2(3, 1)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ sowie die Gerade g in Parameterform durch

$$\vec{OP}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Werte von t, für die das Dreieck: $\Delta(t)$ mit den Ecken: $Q_1, Q_2, P(t)$

a) gleichschenklig oder b) rechtwinklig ist.

Bestimmen Sie jeweils $P(t)$, die Seitenlängen: $d(Q_1, Q_2), d(Q_1, P(t)), d(Q_2, P(t))$ und die Lage des rechten Winkels.

80. Fällen Sie vom Punkt $Q(9, 8, 1)$ das Lot auf die durch die Punkte $P_0(1, 1, -9)$ und $P_1(2, 3, -4)$ gehende Gerade g. Berechnen Sie den Lotfußpunkt L und den Abstand $d(Q, g)$ von Q und g.

81. Bestimmen Sie die Gerade g in der Ebene, die durch die Punkte $P_0 : (-11, 2)$ und $P_1 : (1, -7)$ geht:
a) in Parameterform, b) in parameterfreier Form, c) in Hessescher Normalform.

82. Bestimmen Sie die Ebene ε, welche die drei Punkte $P_0(-1, -1, -1)$, $P_1(-2, -1, 1)$, $P_2(0, -2, 0)$ enthält,
a) in Parameterform, b) in parameterfreier Form, c) in Hessescher Normalform,
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks mit den Eckpunkten: P_0, P_1, P_2 und das Volumen V des Tetraeders mit den Eckpunkten: O, P_0, P_1, P_2

83. Das Parallelogramm $ABCD$, $A(2,3,1)$, $B(-4,4,2)$, $C(-8,-1,5)$ ist die Basis einer vierseitigen Pyramide $ABCDS$, deren Körperhöhe im Mittelpunkt M der Basisfläche errichtet ist und die Länge $\sqrt{354}$ hat. Berechnen Sie die Koordinaten von S.

84. Bestimmen Sie zu $\varepsilon : x - 2y + 2z = 7$ die Gleichungen der beiden parallelen Ebenen im Abstand 6.

85. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$, $A(5,-3,1)$, $B(3,3,2)$, $D(-1,-2,3)$, $E(4,-2,7)$.

86. Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders $A(5,-2,4)$, $B(6,4,0)$, $C(-2,-3,1)$, $D(0,0,9)$.

87. Bestimmen Sie a) den Inkreismittelpunkt b) den Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A(-21,-68)$, $B(27,16)$, $C(-8,36)$. Ermitteln Sie außerdem die Berührungspunkte der Seiten am Inkreis.

88. Bestimmen Sie den Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A(-8,1)$, $B(7\ -4)$, $C(4,8)$.

89. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$?

a) $\{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1 = a, a = \text{konstant}\}$,
b) $\{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1 \geq 0\}$,
c) $\{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1 \cdot x_2 = 0\}$,
d) $\{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1 = 0\} \cup \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_2 = 0\}$,
e) $\{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1 = 0\} \cap \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_2 = 0\}$.

90. Die Vektoren $\vec{u} = (1,-2,5,-3)$, $\vec{v} = (2,3,1,-4)$, $\vec{w} = (3,8,-3,-5)$ erzeugen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Dimension von U.

91. Im $\mathbb{R}^3$ sind folgende Teilmengen gegeben:

a) $T_1 = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{a} = (a_1, a_2, a_2), a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$,
b) $T_2 = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), a_1 \geq 0\}$,
c) $T_3 = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$.

Welche dieser Teilmengen ist ein Untervektorraum?

92. a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(\alpha, 0, 1), (0, \alpha, 2)$ linear unabhängig?
b) Man bestimme diejenigen Werte von $x \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren $(1,2,1)$, $(1,x,-1)$, $(1,-2,1)$ linear unabhängig sind.

93. Man prüfe folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

a) $\vec{a} = (3,6,9)$, $\vec{b} = (-1,8,3)$, $\vec{c} = (11,2,21)$;
b) $\vec{a} = (3,1,7)$, $\vec{b} = (2,-2,18)$, $\vec{c} = (-1,1,-9)$;
c) $\vec{a} = (2,-1,7,6)$, $\vec{b} = (-1,1,-2,-4)$, $\vec{c} = (1,1,8,0)$, $\vec{d} = (0,1,3,-2)$.

94. Man gebe die größte Anzahl von Vektoren aus den angegebenen Familien an, die linear unabhängig sind:

a) $\mathbb{R}^5$: $\vec{u_1} = (1, 0, -1, 1, 2,), \vec{u_2} = (0, 1, 1, 2, 3)$ und $\vec{u_3} = (1, 1, 0, 1, 0)$.

b) $\mathbb{R}^4$: $\vec{u_1} = (1, 0, -1, 1), \vec{u_2} = (0, 1, -1, -1), \vec{u_3} = (1, 1, 0, -1), \vec{u_4} = (0, -3, 0, 4)$.

95. Man bestimme eine Orthonormalbasis für die von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorräume:

a) $V_1 = \mathrm{Span}((1, -1, 0, 1), (-1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1))$,

b) $V_2 = \mathrm{Span}((1, 1, -1, 0), (0, 2, 0, 1), (-1, 0, 0, 1))$,

c) $V_3 = \mathrm{Span}((1, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$,

d) $V_4 = \mathrm{Span}((1, 1, 0, 0), (2, -1, 0, 1), (3, -3, 0, -2), (1, -2, 0, -3))$.

96. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

c) $A \cdot \vec{x} = 0$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $A \cdot \vec{x} = 0$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

97. Welches der folgenden linearen Gleichungssysteme besitzt eine nichttriviale Lösung?

a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

98. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 9 \end{array}$$

b) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$

c) $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

99. Man bestimme alle Lösungen des linearen Systems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & w & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ & - & 3y & + & z & & & = & -2 \\ -3x & + & 3y & + & z & - & 3w & = & -5 \end{array}$$

100. Man löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ -x & + & 2y & + & 8z & = & -1 \\ x & + & 6y & + & 10z & = & 9 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 8z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}$

101. Man löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & & & = & -1 \\ x & & & + & z & = & 5 \\ x & - & y & + & 4z & = & 3 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & & x_4 & = & 0 \end{array}$

102. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & + & (a^2-10)z & = & a \end{array}$$

a) keine Lösung,

b) eine eindeutig bestimmte Lösung,

c) beliebig viele Lösungen besitzt.

103. Für welche $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ eine Lösung?

104. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Systeme lösbar sind und gebe in diesem Fall die Lösung an.

a) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & a^2 \\ x & + & y & + & 3z & = & a \\ 3x & + & 4y & + & 7z & = & 8 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & a^2 \\ x & + & y & + & 3z & = & a \\ 3x & + & 4y & + & 8z & = & 8 \end{array}$$

105. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & t \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, lösbar?

106. Gegeben ist $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

a) Für welche $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ existiert eine Lösung?

b) Man bestimme die Lösung in Abhängigkeit von $\vec{b}$.

107. Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & \alpha & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

a) eindeutig lösbar,

b) lösbar ist.

108. Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 2-t & 3 & -6 \\ 3 & 2-t & -6 \\ -6 & -6 & 11-t \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt $A \cdot \vec{x} = 0$ eine nichttriviale Lösung?

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ lösbar?

c) Für $t = -1$ bestimme man die Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

109. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0\,, \\ -2\lambda x_1 + \lambda x_2 + 9x_3 &= 6\,, \\ 2x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren beliebig viele Lösungen?

c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren keine Lösungen?

d) Man berechne die Lösung für $\lambda = 1$.

e) Man berechne die Lösung zu b).

f) Wie können die Ergebnisse von a), b) und c) geometrisch gedeutet werden?

110. Man bestimme den Rang von

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{R})\,, a \neq b, a \neq c, b \neq c\,.$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M(5 \times 3; \mathbb{R})\,.$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & 1 & -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \in M(4 \times 7; \mathbb{R})\,.$$

111. Man bestimme den Rang von

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & b \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ b & 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

in Abhängigkeit von a und b.

112.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -4 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $3\,A$, $2\,A - 3\,B$, $C\,B$.

113. Man bestimme den Rang sowie die Summe und das Produkt der folgenden Matrizen (soweit möglich):

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

114.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij}) \in M(n \times n; \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_i & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \neq 0$, $0 \leq i \leq n$. Man berechne A^3 und B^2.

115. Man bestimme eine $(3 \times 3)-$ Matrix A, sodass gilt:

$$\text{a) } A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

116. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & 2 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 2 & 2 & a-2 \end{pmatrix} \quad \text{regulär?}$$
Man berechne in diesem Fall A^{-1} und B^{-1}.

117. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

118. Man bestimme – falls möglich – die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 18 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = (c_{ij}) \in M(n \times n; \mathbb{R}) \text{ mit } c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \qquad j = 1, \ldots, n \\ -1 & \text{für } i = j+1, \quad j = 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

119. Man bestimme die Inverse der angegebenen Matrizen:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

120. Man berechne $\det A$ für

$$\text{a)}\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

121. Man berechne die folgenden Determinanten

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 13 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}, \ a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

122. Man berechne die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

123. Man bestimme die Determinante folgender Matrizen ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{pmatrix}.$$

124. Man berechne (unter Verwendung des Determinantenmultiplikationssatzes) $\det A \cdot \det B$ für

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

125. Man berechne mit Hilfe verschiedener Methoden die folgenden Determinanten:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \ \text{b)}\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \ \text{c)}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ \text{d)}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

126. Man berechne die Inversen der angegebenen Matrizen mit Hilfe von Determinanten:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1 & -2/3 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

127. Man untersuche folgende Gleichungssysteme mit Hilfe von Determinanten auf Lösbarkeit und verwende gegebenenfalls die Cramer'sche Regel zur Lösung ($a \in \mathbb{R}$):

a) $$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array}$$

128. Man bestimme unter Verwendung der Cramer'schen Regel alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & y & & & = & a \\ 3x & - & y & - & z & = & -10 \end{array}$$

eine Lösung mit $y = 1$ besitzt.

7 Lösungen

1. a) $L = \{-1\}$, b) $L = \emptyset$, c) $L = \emptyset$, d) $L = \{x : x \leq 1\}$, e) $L = \emptyset$, f) $L = \{-1, -3\}$, g) $L = \{1\}$, h) $L = \{-1, 1\}$.

4. a) $L = \{x : -1 < x < 3\}$,
b) $L = \{x : x < 6\}$,
c) $L = \{x : x > 1\} \cup \{x : x < -7\}$,
d) $L = \{x : -4 < x < \frac{2}{3}\}$,
e) $L = \{x : x < 4, x \neq 2\}$,
f) $L = \{x : \frac{3}{2} \leq x < 2\} \cup \{x : x < -1\}$,
g) $L = \{x : x > 2\} \cup \{x : x < -3\} \cup \{x : \frac{1}{3} < x < 1\}$,
h) $L = \{x : x > 0, x \neq 1\}$,
i) $L = \{x : x \leq 3\}$,
j) $L = \{x : x \leq -3\}$,
k) $L = \{x : -4 \leq x \leq 0\}$,
l) $L = \mathbb{R}$,
m) $L = \{x : x < -3\} \cup \{x : x > 2\}$,
n) $L = \{x : -16 < x < -4\}$,
o) $L = \{x : x > \sqrt{2}\} \cup \{x : x < 1, x \neq 0\}$.

7. a) $\mathrm{Re} z = 1$, $\mathrm{Im} z = -1$, $|z| = \sqrt{2}, z^2 = -2, |z|^2 = 2$
b) $\mathrm{Re} z = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im} z = -\frac{1}{2}, |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}, z^2 = \frac{i}{2}, |z|^2 = \frac{1}{2}$
c) $\mathrm{Re} z = 10$, $\mathrm{Im} z = 1, |z| = \sqrt{101}, z^2 = 99 + 20i, |z|^2 = 101$
d) $\mathrm{Re} z = 11$, $\mathrm{Im} z = 7, |z| = \sqrt{170}, z^2 = 72 + 154i, |z|^2 = 170$
e) $\mathrm{Re} z = -\frac{11}{50}$, $\mathrm{Im} z = \frac{3}{50}, |z| = \frac{\sqrt{130}}{50}, z^2 = \frac{1}{2500}(112 - 66i), |z|^2 = \frac{13}{250}$
f) $\mathrm{Re} z = \frac{30}{13}$, $\mathrm{Im} z = \frac{25}{26}, |z| = \frac{5}{2}, z^2 = \frac{25}{676}(119 + 120i), |z|^2 = \frac{25}{4}$
g) $\mathrm{Re} z = \frac{5}{2}$, $\mathrm{Im} z = -\frac{5\sqrt{3}}{2}, |z| = 5, z^2 = \frac{25}{2}(1 - \sqrt{3}i), |z|^2 = 25$

8. a) $z = \frac{5}{3}$, b) $z = -1 + 2i$, c) $z = 1 - i$.

9. a) Linke Seite der Parabel $x = \frac{1}{2}(y^2 - 3)$ (inkl. Rand)
   b) Zwei Kreisscheiben mit Mittelpunkten $c = \pm 2$, Radius $r = 2$ (inkl. Rand)
   c) Äußeres und Rand einer Kreisscheibe mit Mittelpunkt $c = \frac{1}{2}$, Radius $r = \frac{1}{2}$
   d) Halbebene: $y \leq x - 1$ ohne $z_0 = -i$
   e) Kreisscheibe: $c = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, r = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   f) $\lambda = 1$: Äußeres und Rand einer Kreisscheibe $c = 1 + \frac{i}{2}, r = 1, \lambda = 5 : \mathbb{C}$
   g) Gerade: $y = 2x - 1$
   h) Kreis $c = -1 + i, r = 2$
   i) Ellipse: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
   j) 4 Punkte: $\pm 2, \pm i$
   k) Kreis: $c = -\frac{1}{3}, r = \frac{2}{3}$
   l) Gerade: $x = \frac{1}{2}$
   m) $y > -2 - x, y \geq x - 1, y < x + 2$
   n) Dreieck, Ecken: $0, 1 - i, \frac{1}{3}(1 + i)$
   o) Rhombus, Ecken: $\pm 1, \pm i\sqrt{3}$
   p) Winkelbereich $y \leq 0$ und $y \leq -x + 1$ und $y \leq x + 1$
   q) Parabelbereich: $y \geq \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{2}$
   r) Winkelbereiche: $|y| < |x|$ und $y = 0$

12. a) $a = 0, N = 500^{\frac{2}{3}}$, b) $a = 0, N = 5$, c) $a = 0, N = 10^{18}$, d) $a = 2, N = 5331$.

13. a) $a = \frac{1}{2}$, b) Folge ist nicht konvergent. c) $a = 0$.

14. $e^{\frac{1}{3}}, e^2, e^p$.

15. a) $a = 0$, b) $a = \sqrt{2}$, c) $a = 0$, d) Folge nicht konvergent, e) $a = 0$, f) $a = 0$, g) $a = 2$, h) $a = \frac{1}{3}$, i) $a = 0$, j) $a = \frac{1}{2}$, k) $a = 0$, l) $a = +\infty$.

16. $\frac{a}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}$.

17. Ja.

18. Die Reihe ist a) divergent, b) konvergent, c) konvergent, d) konvergent, e) divergent, f) konvergent, g) konvergent, h) konvergent, i) divergent, j) konvergent.

19. Die Reihen in a), b) und e) sind konvergent mit Summen $\frac{1}{2}, -9, 1$. Die Reihe in d) ist divergent.

20. Die Reihe ist a) konvergent, b) divergent, c) divergent, d) konvergent, e) konvergent, f) divergent, g) konvergent, h) divergent, i) divergent, j) divergent, k) konvergent, l) divergent, m) divergent, n) divergent, o) konvergent, p) divergent, q) konvergent, r) konvergent, s) divergent, t) konvergent, u) konvergent, v) konvergent.

21. Nein.

22. Die Funktion in a) ist stetig außer in $x_0 = 0$. Die anderen Funktionen sind stetig auf $[-\pi, \pi]$.

23. a) $f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, b) $f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, c) $f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, d) $f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

24. a) $f(x)$ ist an $\xi = \pm 2$ jeweils stetig ergänzbar durch $f(-2) = 6$ und $f(2) = 6$.
b) $f(x)$ ist nicht stetig ergänzbar.
c) $f(x)$ ist an $\xi = 1$ stetig ergänzbar durch $f(1) = 2$, an der Stelle $\xi = 3$ nicht stetig ergänzbar.

27. a) $f(x)$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar.
b) $f(x)$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar.
c) $f(x)$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{\pm \text{Arcosh } 2\}$ differenzierbar.
d) $f(x)$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ differenzierbar.

28.
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 4 - y & \text{für } y < 2, \\ 2 - \sqrt{y-2} & \text{für } y \geq 2. \end{cases}$$

30. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $-\frac{3}{2}$, d) 8, e) existiert nicht, f) 0, g) ∞, h) a, i) 0, j) 0, k) 1, l) $\frac{a+b}{2}$, m) 1, n) 1, o) 0, p) 1, q) $-\frac{1}{2}$.

31. Das Verhältnis $h : r$ (Höhe zu Radius) muß $2 : 1$ sein.

32. $a = \frac{2}{\sqrt{3}}, b = \frac{8}{3}$.

33. $l = \sqrt{3}, b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

34. $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

38. $a = 499.657, b = 399.657 = 100 - a, c = 0$.

39. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$.

40. a)
$$f(x) = -\frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{5}{2^{n+1}} + 2(-1)^n \right) x^n,$$

b)
$$f(x) = 3(x-1) + \frac{15}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{2}(x-1)^3 + 18 \sum_{n \geq 4} \frac{(-1)^n (n-4)!}{n!} (x-1)^n,$$

c)
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

42. a) $\leq 0.104 \cdot 10^{-5}$, b) $\leq 0.13 \cdot 10^{-6}$, c) $\leq 0.385 \cdot 10^{-6}$.

43. a) $-\sqrt{5}/3 \leq x < \sqrt{5}/3$, b) $-5/2 < x < -1/2$, c) $12.5 \leq x < 13.5$, d) $e - 1 < x \leq e + 1$, e) $-1 \leq x \leq 1$, f) $-1 < x \leq 1$, g) $-1/4 \leq x < 1/4$, h) für alle $x \in \mathbb{R}$.

44. a) $1/e$, b) 0, c) $1/4$, d) $1/\sqrt{2}$, e) $1/a, a \neq 0, \infty$ sonst, f) 1.

45. $1/b$.

60. a) $\frac{1}{2}[\alpha](2\alpha - [\alpha] - 1)$,
b) $\frac{1}{2422728}$,
c) $3 - \sqrt{5}$,
d) $\frac{m!n!}{(n+m+1)!}$,
e) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3}$,
f) $\frac{1}{60}$,
g) $\frac{1}{16}(-10\cos 1 + \frac{5}{3}\cos 3 - \frac{1}{5}\cos 5 + \frac{128}{15})$,
h) 0,
i) ≈ 9.75,
j) ≈ 12.65.

61. a) 995, b) $9\pi - 1 - \cos(10) - 10\sin(10)$.

62. a) $\frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$, b) 24, c) $4 + 2\pi$.

63. $\frac{\pi^2}{2}$.

64. $\pi\left(2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

65. a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{\pi^2}{8}$, c) $\ln(1+\sqrt{2})$, d) 0.

66. ≈ 0.64.

68. a) $6.282; 8.014$, b) $8.015; 7.359$, c) $7.653; 7.028$.

71. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = 102,17°, \alpha_2 = 114.84°, \alpha_3 = 108.06°$.

72. a) $(9, -4, -1)$, b) 5.

73. a) -2, b) 0, c) 0, d) $-a^2 + 8a + 1$.

74. $(3, -1, 2)$, $x + y + z = 4$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

75. 6.15.

76. 9.

77. $x + z = 4$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\frac{206}{\sqrt{2}}$.

78. a) Hypothenuse $\sqrt{59}$,
b) $\alpha = 28.12°, \beta = \gamma = 75.94°$.

80. $(17/5, 29/5, 3), d(Q, g) \approx 6.34$.

81. a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, b) $3x + 4y = -25$, c) $\frac{3x+4y+25}{5} = 0$.

82. a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $2x + 3y + z = -6$, c) $\frac{2x+3y+z+6}{\sqrt{14}} = 0$, d) $\frac{\sqrt{14}}{2}$, 1.

83. $(1, 8, 20)$ bzw. $(-7, -6, -14)$.

84. $x - 2y + 2z = 25$ bzw. $x - 2y + 2z = -11$.

85. 131.

86. $\frac{365}{6}$.

87. a) $M_i = (5, 10)$, b) $M_u = (-14.5, -1.6)$. Berührpunkt des Inkreises an der Seite AB $= (19, 2)$.

88. $(28/11, 40/11)$.

89. a) kein Unterraum, b) kein Unterraum, c) kein Unterraum, d) kein Unterraum, e) Unterraum.

90. 2.

91. a) Unterraum, b) kein Unterraum, c) Unterraum.

92. a) $\alpha \neq 0$, b) für alle x.

93. a),b),c) linear abhängig.

94. a),b) alle Vektoren sind linear unabhängig voneinander.

96. a) $\vec{x} = (0, 0, 0, 0)$, b) $\vec{x} = t(1, -1, 1, -1, 1), t \in \mathbb{R}$, c) $\vec{x} = s(-5, 1, 1, 0) + t(-10, 2, 0, 1), s, t \in \mathbb{R}$, d) $\vec{x} = (0, 0, 0, 0, 0)$.

97. a) nichttriviale Lösung $\vec{x} = t(-1, -1, 1), t \in \mathbb{R}$, b) nichttriviale Lösung $\vec{x} = t(1, -1, 1), t \in \mathbb{R}$.

98. a) keine Lösung, b) $\vec{x} = (-1, 2, 0)$, c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

99. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

100. a) $\vec{x} = (5/2, -1/2, -1)$, b) $\vec{x} = (3, 1, 0) + t(7/2, -9/2, 1)$, c) $\vec{x} = (3/4, -3/4, 0) + t(-19/8, 15/8, 1)$.

101. a) keine Lösung, b) $\vec{x} = (-3/5, 22/5, 6/5, 0, 0) + s(0, -1, 0, 1, 0) + t(1/2, -3/2, 0, 0, 1), s, t \in \mathbb{R}$, c) nur trivial lösbar.

102. a) keine Lösung, wenn $a = -3$, b) eindeutige Lösung, wenn $a \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}$, c) beliebig viele Lösungen, wenn $a = 3$.

103. $\vec{b} = (b_1, b_2, b_2 - 2b_1)$.

104. a) $a = 2, -4$, b) für alle $a \in \mathbb{R}$.

105. $t \neq 0$.

106. a) $\vec{b} = (b_1, b_2, b_1 + b_2)$, b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{11}b_1 + \frac{3}{11}b_2 \\ \frac{5}{11}b_1 - \frac{2}{11}b_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

107. a) $\alpha \neq -8$, b) für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

108. a) $t = -1, 17$, b) $t \neq 17$, c) $\vec{x} = (1/3, 0, 0) + u(-1, 1, 0) + v(2, 0, 1)$.

109. a) $\lambda \neq 3, -3/2$, b) $\lambda = 3$, c) $\lambda = -3/2$, d) $\vec{x} = (-7/10, 1, 2/5)$, e) $\vec{x} = (-1/2, 1, 0) + t(1/2, -2, 1)$, f) im Fall $\lambda = 3$ handelt es sich um 3 Ebenen, die sich entlang einer Geraden schneiden, bei $\lambda = -3/2$ haben sie keine gemeinsamen Punkte. Im Fall $\lambda \neq 3, -3/2$ schneiden sich die 3 Ebenen in genau einem Punkt.

110. a) 3, b) 3, c) 3.

111. $a = b = 0$: Rang 0; $a \neq 0, b = 0$: Rang 4; $a = 0, b \neq 0$: Rang 2; $a = \pm 2b, b \neq 0$: Rang 3; $a \neq \pm 2b, b \neq 0$: Rang 4.

112.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -14 & 18 \\ 4 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7 & -6 & -4 \\ -8 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

113. a) Rang von A, B ist $3, 2$.

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 22 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 17 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

b) Rang von A, B ist $2, 2$.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 17 & 21 \end{pmatrix},$$

BA und $A + B$ sind nicht definiert.

114. A^3 ist die Nullmatrix, B^2 ist eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $a_1^2, \ldots, a_n^2$.

115.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

116.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, a \neq 0; \quad B^{-1} = \frac{1}{(a+2)(a-4)} \begin{pmatrix} a & -2 & -2 \\ -2 & a & -2 \\ -2 & -2 & a \end{pmatrix}, a \neq -2, 4.$$

117.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 7/3 & -1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 4/9 & -1/9 & -4/9 & 1/9 \\ -1/9 & -2/9 & 1/9 & 2/9 \\ -5/3 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

C^{-1}, D^{-1} existieren nicht.

118.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 5/2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

B^{-1} existiert nicht,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

119.

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 44 & -18 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 11 & 5 & -15 & 2 \\ -2 & 10 & 10 & -4 \\ 10 & -10 & 30 & 20 \\ -5 & 5 & 25 & 10 \end{pmatrix}.$$

120. a) 324, b) 21.

121. a) -75, b) $1 + ab + ad + cd + abcd$.

122. 118.

123. a) $(b-a)(c-a)(c-b)$, b) 0, c) 0, d) $a + b + c + 1$.

124. 169.

125. a) -43, b) 75, c) 9, d) 0.

126. a)

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

127. a) Trivial lösbar für $a \neq 1, -2$. Für $a = 1 : \vec{x} = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1), s, t \in \mathbb{R}$ und für $a = -2 : \vec{x} = t(1, 1, 1), t \in \mathbb{R}$. b) Eindeutig lösbar für $a \neq 1, -2$ mit Lösung $(-1/[(a-1)(a+2)], -1/[(a-1)(a+2)], (a+1)/[(a-1)(a+2)])$.

128. $a = -1$.