

Zusatzblatt 01

Aufgabe Z01-1 Auf einem waagrechten Boden wird eine Leiter an eine senkrechte Wand gelehnt. Der Fusspunkt ist $2m$ von der Wand entfernt.

- (a) Welche Länge hat die Leiter und wie hoch reicht sie, wenn der Winkel zur Waagrechten $\pi/6$ rad ist? (Skizze)
- (b) Der Fusspunkt der Leiter in (a) wird an die Wand herangeschoben so, dass sich der Winkel auf $\pi/3$ rad verdoppelt. Wie weit ist der Fusspunkt von der Wand entfernt und wie hoch reicht die Leiter nun? (Skizze)
- (c) Die Leiter sei ausfahrbar. Der Fusspunkt ist wieder $2m$ von der Wand entfernt. Welche Länge hat die Leiter und wie hoch reicht sie, wenn der Winkel zur Waagrechten auf $\pi/3$ rad gestellt wird? (Skizze)

Aufgabe Z01-2 Die Ebene E_1 sei durch die drei Punkte

$$A(0, 3, 3), \quad B(1, 5, 4), \quad C(1, 1, 4)$$

bestimmt. Die Ebene E_2 enthalte den Punkt $P(-1, -2, 1)$ und habe den Normalvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Schneiden sich diese Ebenen? Wenn ja, bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittmenge. Wie lautet die parameterfreie Darstellung?

Aufgabe Z01-3 Gegeben sind die drei Gleichungen

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5y + 6z = 7 \\ 8z = 16. \end{cases}$$

Welche geometrischen Interpretation haben

- (a) die einzelnen Gleichungen im Raum (Parameterform, Skizze)?
- (b) zwei Gleichungen aus den dreien im Raum (Parameterform, Skizze)?
- (c) alle drei Gleichungen zusammen im Raum (Skizze)?

Aufgabe Z01-4 (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung des Streckenstücks, das die Punkte $P(1, 2)$ und $Q(-2, 1)$ verbindet.

- (b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Punkte an, die im Dreieck mit den Eckpunkten

$$A(3, 0, 3), \quad B(1, 4, 5), \quad C(1, 4, 1)$$

liegen, an. (Skizze)

Aufgabe Z01-5 Bestimmen Sie alle Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ für die die folgende Beziehung gilt:

$$\sin(\alpha) = \cos(2\alpha).$$

Zusatzaufgabe Geben Sie eine geometrische Begründung für die Additionsformel

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta).$$

Aufgabe Z01-6 Zeigen Sie die Lagrangesche Identität:

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$$

für Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

im Raum.

Zusatzaufgabe Zeigen Sie die Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$$

für Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

im Raum.