Übungsbeispiele

zu

Mathematik II M WM VT

Übungen aus Mathematik II M WM VT

1 Koordinatensysteme und lineare Differentialgleichungen

1.1 Lineare Algebra - 2. Teil

1. Man stelle die Vektoren $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ bezüglich der Basis $(0,1,1),(1,0,1),$ $(1,1,0)$ dar (d.h. als Linearkombination der genannten Basisvektoren) und bestimme die Transformationsmatrix dieser Koordinatentransformation.

2. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ordnet jedem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ einen weiteren Vektor $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ gemäß $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ zu. Auf welche Vektoren werden die Basisvektoren $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet? Worauf wird die Gerade $x_2 = kx_1 + d$ abgebildet, worauf die Kreise $x_1^2 + x_2^2 = r^2$? Man diskutiere diese Abbildung!

3. Welche geometrische Bedeutung haben die Koordinatentransformationen $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} ?$$

4. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

   Man beschreibe geometrisch die folgenden linearen Abbildungen:

   a) $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , L_1(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$,
   b) $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , L_2(\vec{x}) = B \cdot \vec{x}$,
   c) $L_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , L_3(\vec{x}) = A \cdot B \cdot \vec{x}$,
   d) $L_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , L_4(\vec{x}) = B \cdot A \cdot \vec{x}$.

5. Man bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

8. Man bestimme die Eigenwerte und ein System paarweise orthogonaler Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Man bestimme eine Matrix A, deren Eigenwerte 1 und 4 sind und deren Eigenvektoren $x_I = (3, 1)$ und $x_{II} = (2, 1)$ sind.

10. Man bestimme den Winkel zwischen den zum kleinsten bzw. zum größten Eigenwert der Matrix A gehörigen Eigenvektoren für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Man bringe auf Diagonalform:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

12. Man transformiere folgende Kegelschnitte auf Normalform

a) $19x_1^2 - 6x_1x_2 + 11x_2^2 - 50x_1 + 50x_2 + 55 = 0$,

b) $x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1 + 2x_2 + \frac{17}{4} = 0$,

c) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1 + x_2 - 2 = 0$,

d) $5x_1^2 + 26x_1x_2 + 5x_2^2 + 62x_1 + 46x_2 + 9 = 0$.

13. Man bestimme die Normalform, den Typ und die Lage (Skizze!) der folgenden Kurven 2. Grades im $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung:

a) $-17x_1^2 + 7x_2^2 + 18x_1x_2 + 16x_1 - 32x_2 + 28 = 0$,

b) $-x_1^2 + 11x_2^2 - 16x_1x_2 - 14x_1 + 38x_2 + 16 = 0$,

c) $2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_1 - 10x_2 - 31 = 0$,

d) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 = 0$,

e) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 6x_2 + 25 = 0$,

f) $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 1 = 0$,

g) $6x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1 + 4x_2 + 1 = 0$,

h) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 2x_2 + 3 = 0$,

i) $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2 - 1 = 0$,

j) $7x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2 + 10\sqrt{3}x_1 + 6x_2 + 3 = 0$.

14. Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ Normalform, Typ und Lage der folgenden Kegelschnitte:

a) $(t-3)x_1^2 + (t+3)x_2^2 + 8x_1x_2 + 2(t+5)x_2 = 0$,

b) $(1+4t)x_1^2 + (t+4)x_2^2 + 4(t-1)x_1x_2 - 20tx_1 - 10tx_2 + 5(5t-1) = 0$.

15. Man bringe folgende Kurven 2. Ordnung auf Normalform und skizziere sie, wenn möglich, an Hand der ermittelten Transformationen:

a) $x^2 - 6xy + 3y^2 + 15 = 0$, b) $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$.

16. Man skizziere folgende Kegelschnitte:

a) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y - 4 = 0$, b) $x^2 - 2xy + y^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + \frac{17}{8} = 0$.

1.2 Lineare Differentialgleichungen

17. Man ermittle diejenigen Kurven, die die folgenden geometrischen Bedingungen erfüllen:

a) Die Subtangente (= Projektion des Abschnitts der Tangente an die Kurve, der zwischen dem Berührpunkt und dem Schnittpunkt mit der x–Achse liegt) hat für jeden Punkt der Kurve stets die Länge 1.

b) Die Subnormale (analog zur Subtangente definiert) hat für jeden Punkt der Kurve stets die Länge 1.

c) Der Winkel zwischen der Kurve und dem Radiusvektor (= Vektor vom Ursprung zum Kurvenpunkt) ist stets konstant.

d) Der Winkel zwischen der Kurve und dem Radiusvektor ist gleich dem Winkel zwischen Radiusvektor und x–Achse.

18. Man löse die folgenden linearen Differentialgleichungen

a) $y' - \tan x \; y = \cos x$,

b) $y' + ky = e^{-kx}$,

c) $y' - \frac{4}{x+2}\, y = (x+2)^5$,

d) $y' + \frac{1}{x-2}\, y = x - 1$,

e) $y' + 4y = x$,

f) $y' - \frac{4}{x+2}y = (x+2)^5$, $\quad y(0) = 8$.

19. Man löse die folgenden linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

a) $y'' + 2y' + y = 0$

b) $2y'' + 2y' + 3y = 0$

c) $y'' + 8y = 0$

d) $y'' + y' - 6y = 0\,,\; y(0) = 1\,,\; y'(0) = 2$

e) $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + 8y' + 16y = 0$

f) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = (x^2 + x)e^x$

g) $y'' - 2y' = 12x - 10$

h) $y'' - 3y' + 2y = 14\sin 2x - 18\cos 2x$

i) $y'' + 4y = 3\sin x$

j) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$

k) $y'' - 3y' + 2y = e^x + 2x^2$

l) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$

m) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$

n) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$

o) $y'' + 4y = \tan 2x$

p) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$

20. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen und gegebenenfalls auch die Lösung des angegebenen AWP

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

b) $y'' + 4y' + 13y = 0$

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $\quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,\; y'(\frac{\pi}{2}) = 1$

d) $y'' + 2y' + y = 0$, $\quad y(0) = 0,\; y'(0) = 2$

21. Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen verwende man einen geeigneten Ansatz:

a) $y'' + y' - 2y = xe^{2x} + \sin x + \cos x$

b) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

c) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$

d) $y'' + y = x^2 + \cos x$

e) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = e^{2x}$

f) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

22. Man bestimme eine spezielle Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen mittels der Methode der Variation der Konstanten:

a) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$, $\qquad$ b) $y'' + y = \cot x$.

23. Mit der Ansatzmethode ermittle man eine partikuläre Lösung der folgenden

a) $y'' - 4y' + 4y = x^2$

b) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$

c) $y'' + y = 4\sin x$

d) $y'' + y' = 4 + 2\sin^2 x$

e) $y'' - 2y' + y = \sin x + \sinh x$

f) $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + 2e^{2x}$

Anmerkung: In den Beispielen 22) und 23) ist natürlich zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu bestimmen.

24. Man bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, daß bei der Differentialgleichung

$$y'' + ky' + y = x^2$$

innere Resonanz vorliegt, und gebe dann die Lösung an.

1.3 Lineare Differentialgleichungssysteme

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Systeme von Differentialgleichungen und gegebenenfalls die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems.

25. Man löse mithilfe des HEAVISIDE-Kalküls die folgenden Systeme:

a) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_2 + 2 \\ x_1(0) &= 1, x_2(0) = -1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10x_1 - 8x_2 + e^t \\ \dot{x}_2 &= 6x_1 - 11x_2 \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_3 + 1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 - 3x_3 + 3 \\ x_1(0) &= -1, x_2(0) = x_3(0) = 0 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + 4 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2 \end{aligned}$

26. Man löse mithilfe der Eigenwerttheorie die folgenden Systeme:

a) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 6x_2 + 11 \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + 2x_2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3\dot{x}_1 &= x_1 - 2x_2 + 9t \\ 3\dot{x}_2 &= -4x_1 - x_2 + 27 \\ x_1(0) &= 3, x_2(0) = 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 4 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 4x_2 - 1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 3x_2 + 2x_3 + t \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + t + 1 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - 2x_3 + 2 \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = 0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + 2x_3 + 1 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - 5x_3 + 1 \\ x_1(0) &= \tfrac{13}{3}, x_2(0) = \tfrac{19}{12}, x_3(0) = \tfrac{1}{12} \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \sin t \\ \dot{x}_3 &= -9x_2 - 6x_3 \end{aligned}$

2 Kurven in Ebene und Raum

2.1 Ebene Kurven

27. Man führe (durch Elimination des Parameters t) die folgenden Kurven in eine parameterfreie Darstellung über:

a) $\begin{aligned} x &= \frac{1+t^2}{4(1-t)} \\ y &= \frac{t}{t+1} \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} x &= \frac{2+t^2}{1+t^2} \\ y &= t - \frac{t}{1+t^2} \end{aligned}$

28. Man diskutiere die folgenden in Polarkoordinaten für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gegebenen Kurven (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Lage der Punkte mit maximalem bzw. minimalem Abstand vom Ursprung bzw. von den Koordinatenachsen, Lage der Punkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente, Skizze):

a) $r = \dfrac{1}{\varphi}$, b) $r = -\dfrac{1}{\varphi}$, c) $r = \varphi^2 + 3\varphi - 4$.

29. Gegeben ist die folgende Kurve in Parameterdarstellung

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3}\,, \quad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}\,, \qquad a > 0\,.$$

a) Man bestimme den Bereich von $t \in \mathbb{R}$, für den die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ definiert sind.

b) Man gebe eine implizite Darstellung dieser Kurve an.

c) Man bestimme die Punkte, in denen die Kurve eine (i) horizontale bzw. (ii) vertikale Tangente besitzt.

d) Man zeige, daß sich die Kurve für $t \to -1$ asymptotische der Geraden $x + y = -a$ nähert.

e) Man skizziere die Funktion.

30. Man bestimme den Definitionsbereich der Kurven

$$\text{a) } r = \cos\varphi\,, \quad \text{b) } r = \cos 2\varphi\,, \quad \text{c) } r = \cos 3\varphi$$

und skizziere sie.
Für die in (a) gegebene Kurve leite man eine Darstellung in kartesischen Koordinaten her.

31. Für die in Bsp.(30) gegebene Kurve bestimme man die Gleichungen der Tangenten und Normalen an die Kurve in einem beliebigen Punkt.

32. Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Kurvenbögen in der Ebene:

$$\text{a) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi/2\,,$$

$$\text{b) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix} \quad \text{zwischen } A(0,0) \text{ und } B(18,9).$$

33. Man berechne die Bogenlänge der folgenden Kurven

a) $y = (x-1)^{3/2} + 2\,, \quad 1 \le x \le 2,$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1,$

c) $r = 1 - \cos\varphi\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

34. Man berechne für $r = \frac{a}{\varphi}\,, a > 0\,, 0 < \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\,,$ die Bogenlänge.

35. Man berechne die Bogenlänge der *Asteroide:*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

36. Gegeben ist die Kettenlinie $y = a \cosh \frac{x}{a}, a \in \mathbb{R}^*$. Man berechne die Bogenlänge zwischen zwei beliebigen Punkten der Kurve sowie die Krümmung im Punkt $P(0,a)$.

37. Man berechne die Länge des Bogens von $S(0, a)$ bis $P(x_0, y_0)$ sowie die Krümmung der *Traktrix*

$$x = a \operatorname{arcosh} \frac{a}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

38. Man bestimme die Krümmung und den Krümmungskreis (Mittelpunkt, Radius) der Kurve $y = x^2$ im Punkt $P(0, 0)$.

39. Man bestimme die Krümmung des Graphen der folgenden Funktionen

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x+4}\,, \quad \text{b) } f(x) = \cos x\,, \quad \text{c) } f(x) = e^{x^2}$$

40. Für die ebene Kurve

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ t - \sin t \end{pmatrix}$$

bestimme man:

(a) Die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt P mit $t = \pi/4$.

(b) Eine Skizze der Kurve.

(c) Die Bogenlänge des Kurvenstücks mit $0 \le t \le \pi$, durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt, das numerisch berechnet werden soll.

41. Man berechne die Lage der Scheitelpunkte der Kurve $y = \ln x$.

42. Man berechne die Lage des Krümmungsmittelpunktes der Kurve $xy = a^2$ im Punkt (a, a).

43. Man bestimme die Krümmung der folgenden ebenen Kurven in Abhängigkeit von t

$$\text{a) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

44. Man bestimme die Gleichung der Evoluten der folgenden Kurven:

a) $y^2 = 2px\,,\ p > 0,$

b) $\begin{cases} x = -a\left(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t\right) \\ y = a\sin t \end{cases}$

45. Für die Kurve

$$r = \frac{\cos(2\varphi)}{\cos\varphi}$$

berechne man den Flächeninhalt der von der Kurve gebildeten Schleife.

46. Man skizziere die Kurve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

und berechne die Fläche unter der Kurve im ersten Quadranten.
Hinweis: Man verwende die in der Vorlesung angegebene Parameterdarstellung für die Kurve und die LEIBNIZ'sche Sektorformel.

2.2 Raumkurven

47. Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Raumkurven:

a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}t^{3/2} \\ \frac{1}{4}t^2 \end{pmatrix}$ zwischen den Punkten $A(0,0,0)$ und $B(4,\frac{16}{3},4)$

b) $x^2 - y^2 = 1$, $z = \operatorname{arcosh} x$, $y > 0$ zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = \pi$

c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos t \\ \frac{1}{3}\sin t \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos t \end{pmatrix}$ zwischen dem Punkt P$(\frac{1}{3\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{3\sqrt{2}})$ und einem weiteren, beliebigen Punkt.

d) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos t \\ e^t\sin t \\ e^t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le \pi$

48. Man berechne die Bogenlänge der folgenden Raumkurvenbögen

a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le \pi/2$,

b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \\ t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$,

c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 2t^{3/2} \\ \sqrt{5}\,t \end{pmatrix}$, zwischen $A(-1,0,0)$ und $B(1,2,\sqrt{5})$,

d) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}t^{3/2} \\ \frac{1}{4}t^2 \end{pmatrix}$, zwischen $A(0,0,0)$ und $B(4,\frac{16}{3},4)$.

e) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos t \\ \frac{1}{3}\sin t \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le \pi$.

49. Man berechne die Bogenlänge des Teils der Kurve

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2} \\ \frac{2}{5}t^{5/2} \end{pmatrix}, \quad t \ge 0,$$

der zwischen den Ebenen $x = 1$ und $x = 2$ liegt.

50. Man bestimme das begleitende Dreibein für

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \frac{1}{3}t^3 \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$$

51. Für die folgenden Raumkurven stelle man das begleitende Dreibein im angegebenen Punkt P auf

$$\text{a) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+\sinh t \\ 1-\cosh t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad P(1,0,1), \quad \text{b) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t+\sin t \\ 1-\cos t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad P(\pi, 2, \pi^2).$$

52. Im Punkt $P(\pi, 2, \pi^2)$ bestimme man die Torsion der Kurve

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t+\sin t \\ 1-\cos t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Ferner gebe man jene Punkte der Kurve an, in denen der Tangentenvektor parallel zur z–Achse ist.

53. Gegeben sei die Raumkurve

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ t^3 \\ 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme in dem Punkt, in dem die Funktion $f(t) = |\dot{\vec{x}}(t)|$ ein Extremum besitzt, das begleitende Dreibein und die Gleichung der Schmiegebene.

54. Man bestimme jene Punkte der Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3+4t \\ -t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

in denen der Binormalvektor $\vec{b}$ parallel ist zur xy–Ebene.

55. Für die Raumkurve

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2+\cos t \\ \sqrt{2}\sin t \\ 2-\cos t \end{pmatrix}$$

bestimme man

(a) das begleitende Dreibein im Punkt $P(3,0,1)$ und

(b) die Krümmung und die Torsion in einem beliebigen Punkt.

Welche Folgerungen ziehen Sie daraus?

56. Man berechne die Krümmung und die Torsion der Raumkurven

$$\text{a) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t^3 \\ 1+t^2 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t(t^2-1) \\ \sin t \\ 1+t+t^2 \end{pmatrix} \quad \text{im Punkt } (-1,0,1),$$

$$\text{c) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -te^t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{im Punkt } (0,0,0),$$

$$\text{d) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ t \\ t \end{pmatrix}.$$

57. Für eine ebene Kurve $\mathcal{C}$ in Polardarstellung $r = r(\varphi)$ zeige man, daß die Krümmung κ gegeben ist durch

$$\kappa(\varphi) = \frac{|r\ddot{r} - 2\dot{r}^2 - r^2|}{|\dot{r}^2 + r^2|^{3/2}},$$

falls $\ddot{r}$ existiert.
Hinweis: Mit Hilfe des Zusammenhanges zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y) und den Polarkoordinaten (r, φ) gemäß

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi$$

kann die Kurve $\mathcal{C}$ auch in der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

(wobei φ jetzt die Rolle eines Parameters übernimmt) angegeben werden. Nun verwende die Formel für die Krümmung einer Kurve in Parameterdarstellung.

3 Funktionen von mehreren Variablen

3.1 Stetigkeit, partielle Ableitungen

58. Man skizziere die folgenden Flächen:

$$\text{a) } z = \sin(x+y), \qquad \text{b) } z = x^2 - y^2, \quad \text{c) } z = \sqrt{1-x^2}, \qquad \text{d) } z^2 - x^2 + y^2 = 1.$$

59. Man berechne

$$\text{a) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}, \qquad \text{b) } \lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{-\frac{1}{x^2(y-1)^2}}.$$

60. Man untersuche folgende Funktionen auf Stetigkeit und fertige eine graphische Darstellung an. Man betrachte dazu eventuell auch die Niveaulinien $f(x, y) = \text{const}$.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\,,\ f(0,0) = 0,$

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,,\ f(0,0) = 0,$

c) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{xy}\,,\ f(0,0) = 0.$

61. Man untersuche die in Bsp. (60) angegebenen Funktionen auf Differenzierbarkeit.

62. Man ermittle $\operatorname{grad} f$ für die in Bsp. (60) angegebenen Funktionen.

63. Gegeben ist die Funktion

$$z = \arctan \frac{y}{x}$$

a) Ist die Funktion im Punkt $P(0,0)$ stetig?

b) Man bilde die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

64. Man bestimme die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x,y) = \sin xy\,, \quad \text{b) } f(x,y,z) = e^{xyz}\,, \quad \text{c) } f(x,y,z) = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^z$$

65. Man bestimme die gemeinsamen Nullstellen von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ für

$$\text{a) } z = \sin(x+y) \qquad \text{b) } z = x^2 - y^2$$

66. Die Funktion $y = y(x)$ ist implizit gegeben durch

$$e^{x-y} + x^2 - y = 1\,.$$

Man berechne $\dfrac{dy}{dx}(0)$.

67. Man berechne die erste und zweite Ableitung der durch

$$2y \sin x + e^{xy} = 2$$

implizit gegebenen Funktion $y = y(x)$ an der Stelle $x_0 = \pi$.

68. Man verifiziere durch Nachrechnen die Kettenregel an Hand der Funktion

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\,\ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

mit $x = e^t, y = e^{-t}$.
(Einmal direkt unter Verwendung der Kettenregel, dann zunächst für x und y die Funktionen einsetzen – man erhält dann eine Funktion $F(t) = f(x(t), y(t))$ – und anschließend nach t differenzieren.)

69. Gegeben sind die Funktion $u = u(\xi, \eta) := \xi^2 e^{2\eta}$ und die Transformationen

$$\text{a) } \xi = \varphi(x,y) = x + y,\ \eta = \psi(x,y) = x - y$$

$$\text{b) } \xi = \varphi(x,y) = x^2 + y^2\,, \eta = \psi(x,y) = xy$$

Für die Funktion $U(x,y) = u(\varphi(x,y), \psi(x,y))$ bestimme man die partiellen Ableitungen U_x, U_y.

70. Gegeben sind die Funktionen

$$\text{a) } u_1(x_1,x_2,x_3) = \sin(x_1+x_2+x_3) \qquad \text{b) } u_2(x_1,x_2,x_3) = \ln(x_1+x_2+x_3)$$

und die Transformation

$$x_1 = \varphi(x,y) = x^2y^2\,, \quad x_2 = \psi(x,y) = xy\,, \quad x_3 = \chi(x,y) = y^2$$

Für die Funktionen

$$U_1(x,y) = u_1(\varphi(x,y),\psi(x,y),\chi(x,y))$$

und

$$U_2(x,y) = u_2(\varphi(x,y),\psi(x,y),\chi(x,y))$$

bestimme man die partiellen Ableitungen $U_{1,x}, U_{1,y}$ bzw. $U_{2,x}, U_{2,y}$.

71. Man zeige, daß die Funktion

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

eine Lösung der Differentialgleichung $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ist.

72. Für $z = \arctan\frac{x}{y}$, wobei $x = u+v$ und $y = u-v$ gelte, zeige man die Gültigkeit der Relation

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$$

73. Man berechne die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden implizit gegebenen Funktionen $z = z(x,y)$:

$$\text{a) } x^2z^y - xyz + \sin(x+y+z) = 1 \qquad \text{b) } x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 + xyz + xy - 1 = 0$$

74. Für $z(x,y) := \dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$, wobei f eine differenzierbare Funktion sei, zeige man:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

75. Man führe in der Gleichung

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

den Übergang zu den neuen unabhängigen Variablen u, v mit $u = xy, v = x^2+y^2$ durch.
Anm.: Durch eine solche Transformation geht die Funktion $z(x,y)$ in eine Funktion $w(u,v)$ über!

76. Man führe in den folgenden Ausdrücken die Transformation auf Polarkoordinaten durch:

$$\text{a) } w = x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \text{b) } w = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \text{c) } w = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

77. Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene und der Flächennormale in den angegebenen Punkten der Flächen $z = f(x, y)$

a) $f(x,y) = 5x^4 + 3y^4$, $P(0,1)$ b) $f(x,y) = x^3 - 5xy + \sin xy + y^4$, $P(\frac{1}{2}, \pi)$
c) $f(x,y) = e^{xy}(\sin x - \log_5 y)$, $P(0,5)$ d) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $P(1,-2)$

78. Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene und der Flächennormale in einem beliebigen Punkt der im Bsp. (58) angegebenen Flächen.

79. Man berechne die Richtungsableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = \cos xy - \sin(x+y)$ im Ursprung in Richtung $\varphi = \pi/4$
b) $f(x,y) = (x^2 + x^2y^4)/y^{10}$ im Punkt $P(1,1)$ in Richtung $\varphi = \pi/3$
c) $f(x,y,z) = x^3yz^2 + e^{2x}$ im Punkt $P(0,3,2)$ in Richtung des Vektors $(1,1,1)$
d) $f(x,y,z) = x^3yz^2 + e^{2x}$ im Punkt $P(0,0,0)$ in Richtung des Vektors $(2,1,-2)$

80. Man bestimme die Richtung der maximalen Änderung der in Bsp. (79) angegebenen Funktionen in den jeweils betrachteten Punkten.

81. Man berechne die Divergenz von

$$\vec{v} = \frac{1}{|\vec{r}|^n}\vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

82. Für

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} xz - y^3 \\ 1 + 2yz \\ \frac{x}{y^2+z^2} \end{pmatrix} \quad \text{berechne man} \quad \mathrm{rot}\vec{v} \quad \text{und} \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{v}).$$

83. Für die Fläche $x^2 + y^2 = z^2$ gebe man eine geeignete Parameterdarstellung an und diskutiere diese anhand einer Skizze. Unter Verwendung der Parameterdarstellung bestimme man die Gleichung der Tangentialebene und der Flächennormalen im Punkt $P(1,1,\sqrt{2})$.

3.2 Taylorreihen, Fehlerrechnung

85. Man gebe die Formel von Taylor auch für Funktionen von n Variablen an.
Hinweis: Man benutze die einschlägige Literatur.

86. Man entwickle folgende Funktionen nach dem Taylorschen Satz um den angegebenen Entwicklungspunkt:

a) $f(x,y) = x^3 + xy^2 + y^3$, $P(1,2)$ b) $f(x,y) = e^x \cos y$, $P(0,0)$
c) $f(x,y) = \frac{e^x e^y}{1+x+y}$, $P(0,0)$ d) $f(x,y) = e^{x+y} + \sin(xy)$, $P(0,0)$
e) $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$, $P(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

87. Man entwickle folgende Funktionen nach dem Taylorschen Satz bis zu den Gliedern dritter Ordnung um den angegebenen Entwicklungspunkt:

a) $f(x,y) = \ln(x-y)\,,\quad P(0,-1),$
b) $f(x,y) = \sin\frac{xy}{2}\,,\quad P(\pi,-1),$
c) $f(x,y) = x^2 - \cos\frac{x}{y}\,,\quad P(\pi,1).$

88. In welchem Bereich liegt der Fehler, mit dem man die Kraft, mit der sich zwei Planeten anziehen, bestimmen kann, wenn die Massen m, M sowie der Abstand r der Planeten bis auf einen Fehler von $\Delta m, \Delta M, \Delta r$ bestimmt werden können? Die Gravitationskraft F berechnet man dabei mit der Gravitationskonstanten γ nach der Formel

$$F = \gamma\,\frac{m \cdot M}{r^2}$$

89. Für ein mathematisches Pendel beträgt die Schwingungsdauer T bei kleiner Auslenkung in erster Näherung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

wenn l die Länge des Pendels und g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Wie groß ist der maximale relative Fehler bei der Bestimmung der Erdbeschleunigung?

3.3 Relative Extrema

3.3.1 Relative Extrema ohne Nebenbedingungen

90. Man bestimme die relativen Extrema der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = x^2 + 4y + \frac{1}{y}$
b) $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$
c) $f(x,y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x}$
d) $f(x,y) = x^6 - 2x^2y + y^2$
e) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$
f) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y$
g) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2) - \frac{x^2}{2} - y$
h) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

91. Man bestimme alle Extrema (lokale Extrema und Randextrema) der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$mit $0 \le x, y \le 2\pi,$
b) $f(x,y) = \cos(xy)\cos(x+y)$ mit $0 \le x, y \le \pi,$
c) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$ mit $x^2 + y^2 \le 1.$

92. Man untersuche folgende Funktionen auf relative und absolute Extrema:

a) $f(x,y) = (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2),$
b) $f(x,y) = 3x^2 - 2(y+1)x + 3y - 1$ in $0 \le x, y \le 1,$
c) $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$ in $x, y \ge 0\,,\ x + y \le 1.$

3.3.2 Ausgleichskurven

93. Gegeben sind n Punkte (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$, in der xy–Ebene, durch die eine Ausgleichsgerade $y = ax + b$ gelegt werde. Man bestimme die Koeffizienten a und b in der Geradengleichung so, daß sich die Gerade von den Meßpunkten möglichst wenig unterscheidet. Dazu minimiert man die Differenzfunktion zwischen der Geraden und den Meßpunkten:
$$F(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - (ax_k + b))^2 \stackrel{!}{=} \text{Min.}$$
(*Methode der kleinsten Fehlerquadrate*, siehe Vorlesung).
Man lege eine Ausgleichsgerade durch folgende Meßpunkte:
$(1,4), (3.5,6), (5,7), (6,8), (9,9), (10,10.5), (11.5,11), (13,12), (14,13), (17,15)$.

94. Analog zum Verfahren in Bsp. (93) bestimme man die Koeffizienten a, b und c in der Ausgleichsfunktion vom Typ $y = ax^2 + bx + c$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate zunächst allgemein durch Angabe des linearen Gleichungssystems, dem diese Koeffizienten genügen müssen, und dann für die angegebenen Meßpunkte

    a) $(1,0.3), (2,1), (3,1.9), (4,3.1), (5,4.7)$
    b) $(-1.6,8), (-1.2,6.5), (-1,6), (-0.6,4), (0,3), (0.6,3), (1,4), (2,9)$
    c) $(-2,-0.8), (0,0.2), (1,0.5), (4,3.1), (7,7.2), (8,9.6)$
    d) $(-1,2), (0,0), (0,1), (1,2)$

3.3.3 Relative Extrema mit Nebenbedingungen

95. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen:

    a) $f(x,y) = 7 - x - 2y$, NB: $x^2 + y^2 = 1$,
    b) $f(x,y) = \cos^2 x + 2\sin^2 y$, NB: $y - x = \pi/2$,
    c) $f(x,y) = x^2 + y^2$, NB: $x^2 + xy + y^2 = 3$,
    d) $f(x,y) = \sin\left(\pi(x^2 + y)\right) + \cos(\pi y)$, NB: $y = 1 - x^2, y \geq 0$.

96. Man berechne den kürzesten Abstand zwischen dem Nullpunkt und der Hyperbel
$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$$

97. Man bestimme auf der Parabel $y = x^2$ den Punkt P und auf der Parabel $x - 2 = y^2$ den Punkt Q derart, daß die Entfernung zwischen P und Q minimal wird.

98. Gegeben ist ein Tetraeder mit den Eckpunkten $A(0,0,0), B(2,0,0), C(0,3,0), D(0,0,4)$. Man suche den Raumpunkt, für den die Summe S der Quadrate der Entfernungen von den Eckpunkten ein Minimum ist, und bestimme das entsprechende S.

99. Einem Kreis mit dem Radius R ist ein Dreieck von maximalem Flächeninhalt einzuschreiben. Man bestimme dessen Seitenlängen.
Hinweis: Man zerlege das eingeschriebene Dreieck in drei Teildreiecke, die den Mittelpunkt M des Kreises als gemeinsamen Eckpunkt besitzen und führe dann die Winkel der einzelnen Dreiecke in M als Variable ein.

100. Gesucht ist das Volumen des größten Quaders mit achsenparallelen Kanten innerhalb des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen - 2. Teil

101. Man löse die folgenden Differentialgleichungen und zeichne einige spezielle Lösungskurven:

a) $y' + \frac{y}{3} = \frac{1-2x}{3}\, y^4$

b) $y' = -x(\operatorname{sgn} y)\sqrt{|y|}$

c) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$

d) $y' = y^2 + (1-2x)y + 1 - x + x^2$

e) $y' + y^2 - 2x^2y + x^4 - 2x - 1 = 0$

102. Man löse folgende Differentialgleichungen als Bernoulli'sche Differentialgleichungen

$$\text{a)} \quad y' - \frac{1}{x}y = -\frac{3x^2}{y^2}, \qquad \text{b)} \quad y' + \frac{1}{x}y = -xy^2.$$

103. Man löse folgende Differentialgleichungen als Riccati'sche Differentialgleichungen

a) $y' = y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{3}{x^2}$, part. Lsg.: $y_p = 1/x$,

b) $y' = \frac{1-x}{2x^2}y^2 + \frac{1}{x}y + \frac{x-1}{2}$, part. Lsg.: $y_p = x$.

104. Man untersuche, ob folgende Differentialgleichungen exakt sind, und löse sie dann gegebenenfalls

a) $y\,dx + (x + \frac{2}{y})\,dy = 0$

b) $(y - x^3)\,dx + (x + y^3)\,dy = 0$

c) $\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\,dy = 0$

d) $(2xy + 4)\,dx + x^2\,dy = 0$

e) $(\sin x\,\tan y + 1)\,dx + \frac{\cos x}{\cos^2 y}\,dy = 0$

f) $(1 + y)\,dx + (1 - x)\,dy = 0$

g) $\frac{y}{1-x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1-x^2y^2}\,dy = 0$

h) $e^x \sin y\,dx + (2y + e^x\cos y)\,dy = 0$

105. Man finde einen geeigneten integrierenden Faktor und löse dann folgende Differentialgleichungen

a) $(3x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$,

b) $(xy - 1)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$,

c) $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$,

d) $dx - x\cot y\,dy = 0$,

e) $(y + xy^2)\,dx - x\,dy = 0$,

f) $(y^3\cos(xy) + 2xy)\,dx + (xy^2\cos(xy) - y\sin(xy) - 2x^2)\,dy = 0$.

106. Man löse die folgenden Differentialgleichungen

a) $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x\,,\ x \neq 0$,

b) $x^2y' + xy = x^2 + y^2\,,\ x > 0$.

c) $y' = (x - 2y)^2 + \frac{1}{2}$.

Hinweis: Im Bsp.(c) führe man die Substitution $x - 2y(x) = z(x)$ durch.

107. Man löse folgende Differentialgleichung vom Ähnlichkeitstyp (Subst.: $y = xz$)

$$y' = 2e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

108. Man löse die folgenden Differentialgleichungen

a) $y = xy' + y^2$

b) $y = xy' + \frac{a}{y}$

c) $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$

d) $y'^2 + (x-2)y' - y + 1 = 0$

e) $(y^2 - 3xy - 2x^2)\,dx = (x^2 - xy)\,dy$

f) $(xe^y + y - x^2)\,dy = (2xy - e^y - x)\,dx$

g) $(1+x^2)y' + 2xy = 4x^3\,,\ y(1) = 1$

109. Man löse folgende Differentialgleichungen dadurch, daß man die unabhängige und die abhängige Variable vertauscht, d.h. man sucht dann nach einer Funktion $x = x(y)$.

$$\text{a) } y' = \frac{1}{3x + \sin y}, \qquad \text{b) } y' = \frac{2x^3 y}{2y - x^4}.$$

110. Man ermittle die Gleichung der Einhüllenden der folgenden Kurvenscharen ($C \ldots$ Scharparameter)

a) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = R^2\,, R \in \mathbb{R}$,

b) $y = Cx + 2\sqrt{aC}\,, a \in \mathbb{R}$,

c) $y = Cx + C - C\ln|C|$.

111. Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen vom Euler'schen Typ mittels der Substitution $x = e^t, y(x) = y(x(t)) = v(t), x > 0$:

a) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

b) $x^2y'' + xy' + y = 1$

c) $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x)$

d) $xy'' + y' = 1$

112. Man ermittle die allgemeine Lösung von

a) $x^2y'' - 3xy' + 7y = 0$

b) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$

c) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

d) $x^2y'' - 2y = 3x^2 + 10\sin(\ln|x|)\,, x \neq 0$

e) $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2$

f) $x^3y''' + 2xy' - 2y = x^2\ln x + 3x$

5 Mehrfachintegrale

5.1 Doppelintegrale

113. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

mit

a) $f(x,y) = x\sin y - ye^x$, dabei ist B das Rechteck $B = [-1,1] \times [0,\pi/2]$

b) $f(x,y) = \sin^2 x\, \sin^2 y$, B wie in (a)

c) $f(x,y) = \sqrt{|y-x^2|}$, $B = [-1,1] \times [0,2]$

d) $f(x,y) = xy^2$, B ist der von den Kurven $y = -1, x = \sin(\pi y)$ und $y = (x+1)^3$ begrenzte Bereich

e) $f(x,y) = x^2 y$, B ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0), (0,1)$

f) $f(x,y) = x^2 y$, B ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,1), (0,-1), (1,0)$

g) $f(x,y) = x^2 y$, B ist das Innere der Ellipse mit den Halbachsen a, b in Hauptlage

h) $f(x,y) = x^2$, wobei B von den Kurven $xy = 16, y = x, y = 0$ und $x = 8$ begrenzt wird

i) $f(x,y) = e^{x+y^2}$, $B = \{(x,y) \big| \ln y \leq x \leq \ln 2y,\ 1 \leq y \leq 2\}$

j) $f(x,y) = y\sqrt{x}$, $B = \{(x,y) \big| 0 \leq x \leq y^2,\ 0 \leq y \leq 1\}$

k) $f(x,y) = (1-x^3)y^2$, B wird begrenzt von den Kurven $y = x^2$ und $x = y^2$.

l) $f(x,y) = y(1 - \cos \frac{\pi x}{4})$, B wird begrenzt von den Kurven $x = 0, y = \sqrt{x}$ und $y = 2$.

m) $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + 2$, B wird begrenzt von den Kurven $y = 2 - x^2 + x$, $x = 0$ und $y = 0$.

114. Man führe in den folgenden Bereichsintegralen von der Form

$$\iint_B f(x,y)\, dx\, dy$$

die Transformation auf Polarkoordinaten ($x = u\cos v, y = u \sin v$) durch:

a) $B = \{(x,y):\ x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$

b) $B = \{(x,y):\ x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

115. Man berechne die Lage des Schwerpunktes des von den Kurven $y = 1, y = 2, y = x$, $y = x/3$ begrenzten Bereichs, wobei die Massenbelegung ρ gegeben ist durch $\rho(x,y) = x + y$.

116. Man bestimme die Gesamtmasse des mit einer Masse der Flächendichte $\rho(x,y) = y - x + 8$ belegten Flächenstücks in Form eines Dreiecks mit den Eckpunkten $A(0,0)$, $B(0,4)$ und $C(1,0)$.

117. Man berechne den Schwerpunkt des Flächenstücks, das begrenzt wird von den Kurven $y = x^2$, $y = x$, und das mit der Masse der Flächendichte $\rho(x,y) = x + y$ belegt ist.

118. Man berechne das Flächenträgheitsmoment bezüglich der x–Achse des Bereichs $B = \{(x,y):\ 0 \leq y \leq e^{-x}, x \geq 0\}$ mit der Massenbelegung $\rho(x,y) = x$.

119. Man berechne den Flächeninhalt des Teils der Fläche

$$z = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}),$$

der über dem Bereich $B = [0,1] \times [0,1]$ liegt.

120. Man berechne den Flächeninhalt des Flächenstücks, das vom Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ aus dem Zylinder $x^2 + z^2 = 1$ herausgeschnitten wird.

121. Man berechne das polare Trägheitsmoment des von den Kurven $y = x^2 - 1, x = 2, y = 0$ begrenzten Bereichs bezüglich des Punktes $P(0, -1)$ (d.h. die Drehachse steht senkrecht auf die xy–Ebene und geht durch P) .

5.2 Dreifachintegrale

122. Man berechne das Volumen der Körper, die von den folgenden Flächen begrenzt werden

a) $x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0$ und $x + y + z = 1$

b) $z = x^2\,,\ z = y\,,\ y = 4$

c) $x = z^3\,,\ y = 2x\,,\ y = 2z^2$

d) $z - x = 2\,,\ z = x^2 + y^2$

e) $x - y + z = 6, x + y = 2, x = y, y = 0, z = 0$

f) $z = x^2 + y^2, z = 0, y = x^2, y = 1$

g) $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 3x, z > 0$

h) $|x| + |y| = \pi/2, z = 0, z = \cos x\ \cos y$

i) $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = e^{-(x^2+y^2)}$

j) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x$

k) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = xyz$

l) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \dfrac{64}{x^2 + y^2}$

m) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{h}$

123. Man berechne das Integral

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

mit

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2\,,$ B wird durch die Flächen $x^2 + y^2 = 2z$ und $z = 2$ begrenzt

b) $f(x, y, z) = 1\,,\ B = \{(x, y, z) :\ |x| + |y| + |z| \le 1\}$

c) $f(x, y, z) = z\,,\ B = \{(x, y, z) :\ |x| + |y| + |z| \le 1\}$

d) $f(x, y, z) = xyz$ wobei B von den Ebenen $x = 0, y = 0, y = 1 - x, z = 0$ und $z = 2 - x$ begrenzt wird

e) $f(x, y, z) = x\,,$ B wird begrenzt von den Ebenen $x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 2$ und der Fläche $z = x^2 + y^2\,.$

f) $f(x, y, z) = 1\,,$ B wird begrenzt von den Ebenen $y = x + 2\,,\ z = x + 3$ und den Flächen $y = x^2\,,\ 4z = x^2 + y^2\,.$

g) $f(x,y,z) = 1-z^2$, B ist die Pyramide mit den Eckpunkten $A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0), D(1,1,0), E(0,0,1)$.

h) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$, B wird begrenzt von den Sphären $x^2+y^2+z^2=9$ und $x^2+y^2+z^2=4$.

124. Man berechne das Volumen jenes Körpers, den der Zylinder $x^2+y^2=2ay$ aus der Kugel $x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2, a>0$, herausschneidet.

125. Ein Drehkörper, dessen Profil durch die Gleichung $9r^2 = z(3-z)^2$ gegeben ist, ist bis zur Höhe $z=2$ mit einer homogenen Flüssigkeit ($\rho(x,y,z)=1$) gefüllt. Man bestimme die Koordinaten des Schwerpunkts der Flüssigkeit.

126. Ein homogener Körper werde durch die Flächen $z^2=2x, z=0, x^2+y^2=x$ begrenzt. Man berechne sein Trägheitsmoment bezüglich der z–Achse.

127. Man bestimme den Schwerpunkt des Körpers, der begrenzt wird von dem parabolischen Zylinder $z=4-x^2$ und den Ebenen $x=0$, $y=0$, $y=6$ und $z=0$.

6 Lösungen

1. $(1,0,0) = \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1 - \frac{1}{2}(1,1,0)$. Die Übergangsmatrix T lautet

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Bilder der Basisvektoren: $(1,-1), (1,1)$. Bild der Geraden $x_2 = kx_1 + d$ lautet

$$\begin{array}{ll} y_2 = \frac{k-1}{k+1}y_1 + \frac{2d}{k+1}, & k \neq -1, \\ y_1 = d, & k = -1, \end{array}$$

es handelt sich also wieder um Geraden. Kreis: $y_1^2 + y_2^2 = 2r^2$ (wieder ein Kreis). Die Abbildung ist eine Drehstreckung (Drehwinkler $\frac{\pi}{4}$, Streckungsfaktor $\sqrt{2}$).

3. Drehung mit Drehwinkel a) $\frac{3\pi}{4}$, b) $\frac{\pi}{3}$.

4. a) Drehung um die x_3-Achse mit Winkel φ, b) Drehung um die x_2-Achse mit Winkel φ, c) zunächst Drehung um die x_2-Achse mit Winkel ψ, dann um die x_3-Achse mit Winkel φ, d) Drehung um die x_3-Achse mit Winkel φ, dann Drehung um x_2-Achse mit Winkel ψ.

5. EW: $0,3$, Eigenvektoren: $(-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)$; EW: $1,-1,i,-i$, Eigenvektoren: $(1,1,1,1), (-1,1,-1,1), (-1,-i,1,i), (-1,i,1,-i)$.

6. EW: $a+ib, a-ib$, Eigenvektoren: $(1,i), (i,1)$, für $b \neq 0$, sonst: $\vec{x}$ beliebig; EW: -1, Eigenvektor: $(1,-1,0)$.

7. EW: $3, 4, 5$, Eigenvektoren: $(-1,-1,1), (0,1,0), (1,1,1)$; EW: $1,3,6,10$, Eigenvektoren: $(-\frac{45}{4}, \frac{45}{4}, -\frac{9}{4}, 1), (0,1,-\frac{5}{3},1), (0,0,1,-\frac{9}{4}), (0,0,0,1)$.

8. EW: $1, 4$, ONB von Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

EW: $1, 2, 3$, ONB von Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

EW: $1, 5$, ONB aus Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} -2 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{9} \\ 1 & -\frac{4}{5} & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

10. $\frac{\pi}{2}$.

11. Es ist $D = S \cdot A \cdot S^{-1}$, wobei $D = \text{diag}(2, 3, \frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2})$ und

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{13}}{26} \\ -\frac{1}{\sqrt{13}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{13}}{26} \end{pmatrix},$$

und $D = S \cdot B \cdot S^{-1}$, wobei $D = \text{diag}(12, 6, 6)$ und

$$S = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. a) Ellipse: $z_1^2 + \frac{z_2^2}{2} = 1$, b) Parabel: $z_2^2 = -\frac{1}{2} z_1$, c) zwei parallele Geraden: $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \pm \frac{\sqrt{18}}{4}$, d) Hyperbel: $18 z_1^2 - 8 z_2^2 = 68$.

13. a) Hyperbel: $z_1^2 - \frac{z_2^2}{2} = 1$, b) Hyperbel: $\frac{z_1^2}{\frac{2}{3}} - \frac{z_2^2}{2} = 1$, c) Ellipse: $\frac{z_1^2}{6} + \frac{z_2^2}{36} = 1$, d) zwei parallele Geraden: $z_2 = 0, z_2 = -\sqrt{2}$, e) Parabel: $z_2^2 = 8\sqrt{2} z_1 - 23$, f) Doppelgerade: $z_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, g) entarteter Punkt: $(0,0)$, h) keine reeller Kegelschnitt, i) Geraden: $z_2 = \pm 2 z_1$, j) Ellipse: $z_1^2 + \frac{z_2^2}{9} = 1$.

14. a) für $t = 5$: Doppelgerade, $t = 3$: 2 Geraden, $-5 < t < 3$ oder $3 < t < 5$: Hyperbel, sonst: Ellipse; b) für $t = 0$: 2 Geraden, $t > 0$: Ellipse, $t < 0$: Hyperbel.

15. a) kein reeller Kegelschnitt: $(7+\sqrt{37})x^2 + (7-\sqrt{37})y^2 = -30$, b) Ellipse: $\frac{z_1^2}{\frac{32}{9}} + \frac{z_2^2}{\frac{32}{9}} = 1$.

16. a) Hyperbel: $(7+\sqrt{37})x^2 + (7-\sqrt{37})y^2 = -30$, b) Ellipse: $\frac{z_1^2}{\frac{32}{9}} + \frac{z_2^2}{\frac{32}{9}} = 1$; b) Parabel: $z_2^2 + \frac{3}{2}z_1 + 1 = 0$.

17. a) $y(x) = Ce^{\pm x}$, b) $y^2(x) = \pm 2x + C$, c) $r(\varphi) = e^{C^x \varphi}$, d) $r(\varphi) = C \sin\varphi$.

27.
$$\text{a) } x = \frac{1}{4}\frac{1-2y+2y^2}{1-3y+2y^2}, \qquad \text{b) } y^2 = \frac{(2-x)^3}{x-1}.$$

32. a) $\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$, b) $\frac{61}{3}$.

33. a),b) $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$, c) 8.

34.
$$s = -a\left(\frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\varphi^2+1}-\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}+\varphi}\right|\right)\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

35. 6.

36. Bogenlänge zwischen x_1 und x_2:
$$s = a\left(\sinh\frac{x_1}{a} - \sinh\frac{x_2}{a}\right).$$
Krümmung: $\frac{1}{a}$.

37. $s = a\ln\frac{a}{y_0}$; Krümmung:
$$\kappa = \frac{1}{a|\sinh t|}.$$

38. Krümmung:
$$\kappa(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}},$$
Radius des Krümmungskreises im Punkt $(0,0)$: $\frac{1}{2}$, Mittelpunkt: $(0, \frac{1}{2})$.

39. a)
$$\kappa = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x+4)(4x+17)}},$$
b)
$$\kappa = -\frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)^2}},$$
c)
$$\kappa = 2\frac{e^{x^2}\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{4x^2e^{2x^2}+1}}.$$

40. a) Tangente:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{\pi-2\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

c) ≈ 5.52.

41. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\ln 2)$.

42. $(2a, 2a)$.

43.

$$\text{a) } \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{b) } \frac{2}{(e^{2t}+e^{-2t})^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{c) } -\frac{1}{2\sqrt{2-2\cos(t)}}.$$

44.

$$\text{a) } \eta = -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(\xi-p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}, \quad \text{b) } \eta = a\cosh\frac{\xi}{a}.$$

45. $2 - \frac{\pi}{2}$.

46. $\frac{3\pi}{32}$.

47. a) 8, b) $\sqrt{2}\sinh\pi$, c) $\frac{t}{3}$, d) $\sqrt{3}(e^{\pi}-1)$.

48. a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, c) $4\sqrt{2}-2$, d) 8, e) $\frac{\pi}{3}$.

49. $\frac{111}{80}$.

50.

$$\vec{t} = \frac{1}{2+t^2}\begin{pmatrix} 2 \\ t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \frac{1}{2+t^2}\begin{pmatrix} -t^2 \\ -2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{1}{2+t^2}\begin{pmatrix} -2t \\ -2t \\ 2-t \end{pmatrix}.$$

51. a)

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{5\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

b)

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

52. $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $(2k+1)\pi$.

53. Extremum in $t=0$, Gleichung der Schmiegebene: $x_2 = 0$, Dreibein:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

54. $(0,0,1)$.

55. a)

$$\vec{t}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};$$

b) Krümmung: $\frac{2}{\sqrt{8}}$, Torsion: 0; daher liegt die Kurve in einer Ebene.

56. a) Krümmung: $\frac{12\sqrt{2}t^2}{8t^3\sqrt{(2+9t^2)^3}}$, Torsion: 0; b) Krümmung: $\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$, Torsion: $\frac{1}{2}$; c) Krümmung: $\frac{2\sqrt{3}}{2}$, Torsion: $\frac{1}{2}$; d) Krümmung: $\frac{2e^t\sqrt{e^{2t}+1}}{\sqrt{(2e^{2t}+1)^3}}$, Torsion: $\frac{\cos(2t)}{e^{2t}+1}$, f) Krümmung: $\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{(2t^2+1)^3}}$.

59. a) existiert nicht, b) 0.

60. a),c) stetig für alle (x,y), b) stetig außer in $(0,0)$.

61. a) überall differenzierbar, b) differenzierbar außer in $(0,0)$, c) überall differenzierbar.

62. a)

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix},\ \text{für } (x,y)\neq(0,0),\quad \operatorname{grad} f(0,0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

63. a) unstetig in $(0,0)$, b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

65. a) $2x+2y=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, b) $x=y=0$.

66. $\frac{1}{2}$.

67.

$$y(0)=\frac{\ln 2}{\pi},\quad y'(0)=\frac{2\ln 2}{\pi^2},\quad y''(0)=-\frac{9\ln^2 2}{\pi^3}.$$

73. a)

$$z_x=\frac{yz-2xz^y-\cos(x+y+z)}{x^2yz^{y-1}-xy+\cos(x+y+z)},\quad z_y=\frac{xz-x^2z^y\ln z-\cos(x+y+z)}{x^2yz^{y-1}-xy+\cos(x+y+z)};$$

b)

$$z_x=-\frac{3x^2(y^3+z^3)+yz+y}{3z^2(x^3+y^3)+xy},\quad z_y=-\frac{3y^2(x^3+z^3)+xz+x}{3z^2(x^3+y^3)+xy}.$$

74. $w_u=0$.

75. Sei $z(x,y)=j(r,\varphi), w(x,y)=w(r,\varphi)$. a) $w=j_\varphi$, b) $w=r\cos(2\varphi)j_\varphi-\sin(2\varphi)j_\varphi$, c) $w=j_{rr}+\frac{1}{r^2}j_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r}j_r$.

77. Normalvektor der Tangentialebene bzw. Richtungsvektor der Flächennormale ist gegeben durch:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - 5\pi \\ -\frac{5}{2} + 4\pi^3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\ \begin{pmatrix} -4 \\ -\frac{1}{5\ln 5} \\ -1 \end{pmatrix}, \text{d)}\ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

78. Normalvektoren sind gegeben durch

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} \cos(x+y) \\ \cos(x+y) \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\ \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{d)}\ \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ -\frac{y}{z} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

79. a) $-\sqrt{2}$, b) $2 - 8\sqrt{3}$, c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$, d) $\frac{4}{3}$.

80.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \end{pmatrix}, \quad \text{c), d)}\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

81.

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{3-n}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

82.

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} -2y - \frac{2xy}{(y^2+z^2)^2} \\ x - \frac{1}{y^2+z^2} \\ 3y^2 \end{pmatrix},$$

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$.

83. Parameterdarstellung der Fläche:

$$\vec{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Normalvektor ist gegeben durch: $(\cos\varphi, \sin\varphi, -r)$.

86. a) $f(x,y) = 13 + 7(x-1) + 16(y-2) + \frac{1}{2}\left[6(x-1)^2 + 24(x-1)(y-2) + 14(y-2)^2\right] + \frac{1}{6}\left[6(x-1)^3 + 6(x-1)(y-2)^2 + 6(y-2)^3\right]$.

87. a)
$x-(y+1)-\frac{1}{2}\left(-x^2+2x(y+1)-(y+1)^2\right)+\frac{1}{6}\left(2x^3-6x^2(y+1)+6x(y+1)^2-2(y+1)^3\right)$,
b)
$-1+\frac{1}{8}\left((x-\pi)^2-2\pi(x-y)(y+1)+\pi^2(y+1)^2\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{3}{2}(x-\pi)^2(y+1)-\frac{3\pi}{2}(x-\pi)(y+1)^2\right)$,
c)
$1+\pi^2+2\pi(x-\pi)+\frac{1}{2}\left((x-\pi)^2+2\pi(x-\pi)(y-1)-\pi^2(y-1)^2\right)+\frac{1}{6}\left(6(x-\pi)^2(y-1)-12\pi(x-\pi)(y-1)^2+6\pi^2(y-1)^3\right)$.

88.

$$\Delta f \approx \gamma\frac{M}{r^2}\Delta m + \gamma\frac{m}{r^2}\Delta M + 2\gamma\frac{mM}{r^2}\Delta r.$$

89.

$$\left|\frac{\Delta g}{g}\right| \leq \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}.$$

90. a) Minimum: $(0, \frac{1}{2})$, Sattelpunkt: $(0, -\frac{1}{2})$; b) Minimum: $(0, 0)$; c) Maxima: $(1, 1), (-1, -1)$; d) Minimum: $(0, 0)$, Maxima: $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\right)$; e) Sattelpunkt: $(0, 0)$; f) Minimum: $(1, 1)$, Sattelpunkt: $(1, -1)$; g) Maximum: $(0, 2)$, Sattelpunkte: $(\pm 1, 1)$; h) Sattelpunkt: $(0, 0)$, Minimum: $(1, \frac{1}{2})$.

91. a) Sattelpunkt: $x = \pi$, Maximum: $x = \frac{\pi}{3}$, Minimum: $x = \frac{5\pi}{3}$, Randextrema bei $(0, \pi/2), (0, 2\pi), (2\pi, 0), (2\pi, 3\pi/2), (\pi/2, 0), (3\pi/2, 2\pi)$; b) Minimum: $(0, 0)$, Maximum: $(-1 + \sqrt{1+\pi}, -1 + \sqrt{1+\pi})$; c) Minimum: $(0, 0)$, Randmaxima: $(-0.9, 1, 4), (0.9, -1.4)$.

92. Sattelpunkt: $(0, 0)$; b) Sattelpunkt: $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$, absolutes Maximum: $(0, 1)$, absolutes Minimum: $(\frac{1}{3}, 0)$; c) absolutes Maximum: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, absolute Minima: überall am Rand.

93. $0.67, 3.56$.

94. a) $0.15, 0.19, -0.02$; b) $1.76, -0.62, 3.01$; c) $0.09, 0.46, -0.07$; d) $1.5, 0, 0.5$.

95. a) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; b) $(k\pi/2, (k+1)\pi/2), k \in \mathbb{Z}$; c) $(\pm 1, \pm 1), (\mp\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$; d) $(\pm\sqrt{1-k}, k), k \in \mathbb{N}$.

96. $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$;

97. $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (-0.25, 0.06, 2.00, 0.01), (-0.50, 0.25, 2.00, 0.04)$.

98. $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4})$, $S = 21.75$.

99. gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge R.

100. $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

113. a) $\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{e} - e\right)$; b) $\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\sin 2}{2}\right)$; c) 3.24; d) $-\frac{29}{66} - \frac{1}{4\pi^2}$; e) $\frac{1}{60}$; f) 0; g) 0; h) 448; i) $\frac{1}{2}e(e^3 - 1)$; j) $\frac{2}{15}$; k) $-\frac{57}{1540}$; l) $4 - \frac{16}{\pi^2}$; m) $\frac{320}{21}$.

114. a) $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} uf(u\cos v, u\sin v)dvdu$; b) $\int_1^2 \int_0^{\pi/2} uf(u\cos v, u\sin v)dvdu$.

115. $\frac{1}{28}(95, 24)$.

116. 18.

117. $(11/18, 65/126)$.

118. $\frac{1}{27}$.

119. $\frac{8}{15}$.

121. $\frac{44}{105}$.

122. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{32}{3}$; e) $\frac{16}{3}$; f) $\frac{23}{30}$; g) 12; h) π; i) $\pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$; j) $\frac{\pi}{3}$; k) $\frac{1}{360}$; l) $\frac{16\pi^3}{3}$; m) $\frac{a^4bc\pi}{6h^3}$.

123. a) $\frac{16\pi}{3}$; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{13}{240}$; e) $\frac{8\sqrt{2}}{15}$; f) $\frac{783}{70}$; g) $\frac{19}{60}$; h) $4\pi(\ln 3 - \ln 2)$.

124. $\left(\frac{32}{3} - 4\sqrt{3}\right) a^3\pi$.

126. $\frac{32\sqrt{2}\rho}{135}$.

127. $(\frac{3}{4}, 3)$.