Übungsblatt 06

Aufgabe 06-1 Die Ebene E_1 sei durch die drei Punkte

$$A(0,3,3), \qquad B(1,5,4), \qquad C(1,1,4)$$

bestimmt. Die Ebene E_2 enthalte den Punkt $P(-1,-2,1)$ und habe den Normalvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Schneiden sich diese Ebenen? Wenn ja, bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittmenge. Wie lautet die parameterfreie Darstellung?

Aufgabe 06-2 Gegeben sind die drei Gleichungen

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ \qquad 5y + 6z = 7 \\ \qquad\qquad 8z = 16. \end{cases}$$

Welche geometrischen Interpretation haben

(a) die einzelnen Gleichungen im Raum (Parameterform, Skizze)?
(b) zwei Gleichungen aus den dreien im Raum (Parameterform, Skizze)?
(c) alle drei Gleichungen zusammen im Raum (Skizze)?

Zusatz: Welchen Abstand hat der Ursprung $(0,0,0)$ von den einzelnen Ebenen? Welchen Abstand haben existierende Schnittgeraden von der x-Achse? Welchen Winkel haben die Ebenen zueinander? [1]

Aufgabe 06-3 Zeigen Sie die Lagrangesche Identität:

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$$

für Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

im Raum.

Aufgabe 06-4 Zeigen Sie die Grassmann-Identität

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$$

für Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

im Raum.

[1] Benützen Sie Projektion, Skalarprodukt, Kreuzprodukt bzw. Spatprodukt in Ihren Überlegungen.