# Übungsblatt 07

**Aufgabe 07-1** Beispiele 35e, 36c, 37c in der Übungsbeispielsammlung.

**Aufgabe 07-2** Seien $V$ und $W$ Vektorräume über den Skalarkörper $\mathbb{R}$. Verifizieren Sie, dass das Tensorprodukt

$$V \times W := \Big\{(v, w) : v \in V, w \in W\Big\}$$

mit den Operationen

$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w'), \qquad \lambda(v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

wieder ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

**Aufgabe 07-3** Gegeben sind die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Span von $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ (geometrischer Interpretation und Skizze).

(b) Überprüfen Sie, ob die beiden Vektoren

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Span}(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\})$ liegen.

(c) Ergänzen Sie $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

**Aufgabe 07-4** Gegeben sind die $2 \times 3$-Matrizen

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Sind diese Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 3}$ linear abhängig? Falls ja, stellen Sie $\boldsymbol{A}_3$ als Linearkombination der beiden anderen dar.

(b) Bildet der Span der Matrizen $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$ einen Teilraum von $\mathbb{R}^{2\times 3}$? Falls ja, welche Dimension hat dieser Teilraum?

(c) Welche Dimension hat der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 3}$? Geben Sie eine Basis an.

(d) Welche Dimension hat der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^{2\times 3}$? Geben Sie eine Basis an.