Übungsblatt 12

Aufgabe 12-1 Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0.89x_1 + 0.53x_2 &= 0.36, \\ 0.47x_1 + 0.28x_2 &= 0.19 \end{aligned}$$

mittels LR-Zerlegung exakt (z.B. ist dann $0.89 = 89/100$ usw.) und mit Festkomma-arithmetik (runden auf zwei Nachkommastellen). Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 12-2 Gegeben ist die Matrix und rechte Seite

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{b}$ nicht im Bild von $\boldsymbol{A}$ ist.

(b) Bestimmen Sie ein $\boldsymbol{b}^*$ im Bild von $\boldsymbol{A}$, das im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate am nächsten zu $\boldsymbol{b}$ liegt. *Hinweis: Projizieren Sie den Vektor $\boldsymbol{b}$ orthogonal in das Bild von $\boldsymbol{A}$. Verwenden Sie Gram-Schmidt Orthogonalisierung auf die gewählten Basivektoren des Bildes und von $\boldsymbol{b}$ als letzten Vektor an.*

(c) Finden Sie mindests ein $\boldsymbol{x}^*$ mit $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^*$.

Aufgabe 12-3 Beispiel 113 in der Übungsbeispielsammlung.

Aufgabe 12-4 Gegeben ist die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die normalisierte (alle Pivots sind gleich 1) Zeilenstufenform über die Gauß-Jordan Elimination Methode. Diese Matrix heisse $\boldsymbol{A}'$.

(b) Zeigen Sie, dass die Nicht-Nullzeilen von $\boldsymbol{A}'$ eine Basis des Zeilenraumes von $\boldsymbol{A}'$ und von $\boldsymbol{A}$ ist. **Zusatz:** Zeigen Sie, dass das generell für $m \times n$ Matrizen gilt.

(c) Finden Sie eine Basis des Spaltenraumes von $\boldsymbol{A}$ und von $\boldsymbol{A}'$.

(d) Bestimmen Sie Kern und Bild von $\boldsymbol{A}$ und von $\boldsymbol{A}'$.

(e) Finden Sie das Bild der Nicht-Nullzeilen von $\boldsymbol{A}'$ (als Spaltenvektoren gesehen) unter der von $\boldsymbol{A}$ definierten linearen Abbildung $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$; d.h., bestimmen Sie $\boldsymbol{F}((\boldsymbol{A}')^{\mathrm{T}})$. Skizzieren Sie die Abbildung $\boldsymbol{F}$ (so wie am Mittwoch gezeigt). Vergleichen Sie $\boldsymbol{F}((\boldsymbol{A}')^{\mathrm{T}})$ und das Bild von $\boldsymbol{F}$.