Uebungsblatt 01 Lineare Algebra WS 2016/2017

1. **Definition:** Eine nichtleere Teilmenge H einer Gruppe G mit Verknüpfung $\circ$ heißt genau dann eine *Untergruppe*, wenn H bezüglich der von G induzierten Verknüpfung eine Gruppe ist; d.h., dass aus $g, h \in H$ stets $g \circ h \in H$ und $h^{-1} \in H$ folgt.

   Definition: Eine *Relation* $\sim$ auf G heißt *Äquivalenzrelation* auf G, wenn $\sim$ *reflexiv* (d.h., $g \sim g$ für alle $g \in G$), *symmetrisch* (d.h., für alle $g, f \in G$ gilt $g \sim f \Rightarrow f \sim g$) und *transitiv* (d.h., für alle $f, g, h \in G$ gilt, dass aus $g \sim h$ und $h \sim f$ stets $g \sim f$ folgt) ist.

   Sei H eine Untergruppe von G mit Verknüpfung $\circ$. Betrachten Sie die folgende Relation auf G: $f \sim g$ genau dann, wenn $f^{-1} \circ g \in H$.

   (a) Zeigen Sie, dass das neutrale Element e in H liegt.

   (b) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G ist.

2. Zeigen Sie, dass die 6 komplexen Lösungen der Gleichung $z^6 = 1$ zusammen mit der üblichen Multiplikation für komplexe Zahlen eine Gruppe bildet. Stellen Sie die Verknüpfungstafel

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & z_1 & \cdots & z_6 \\ \hline z_1 & z_1 \cdot z_1 & \cdots & z_1 \cdot z_6 \\ \vdots & & & \\ z_6 & z_6 \cdot z_1 & \cdots & z_6 \cdot z_1 \end{array}$$

   auf. Interpretieren Sie diese mit Hilfe des Einheitskreises. Geben Sie Beispiele von Untergruppen an.

3. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ aller (2×2)-Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit reellen Einträgen a, b, c, d mit nichtverschwindender Determinante (d.h., $ad - bc \neq 0$) bezüglich der Matrizenmultiplikation

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

   eine nichtkommutative Gruppe ist. Bestimmen Sie das neutrale Element und das zu einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ inverse Element A^{-1}.

Bildet die Menge der speziellen Matrizen $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ bezüglich Matrizenmultiplikation? Geben Sie eine Interpretation solcher Matrizen und deren Inversen.

4. **Definition:** Die *Permutationsgruppe* $\mathcal{S}_n$ ist die Menge aller *Permutationen* der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ (d.h., die Menge der bijektiven Abbildungen $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$) versehen mit der Verknüpfung von Abbildungen als Operation.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}_3$ keine abelsche Gruppe ist; d.h., finden Sie zwei Abbildungen $f, g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, sodass $g \circ f \neq f \circ g$ ist.

5. Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ (versehen mit den üblichen Operationen) Untervektorräume sind:

   (a) $A = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 = 0\right\}$,

   (b) $B_c = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_3 = c + x_1 - x_2\right\}, \quad c \in \mathbb{R}$,

   (c) $C = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 \cdot x_2 \geq 0\right\}$.