Uebungsblatt 02 Lineare Algebra WS 2016/2017

1. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 5, -2)$ und $v_2 = (3, -1, -1)$ aus $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:
   (a) Es gibt reelle Zahlen λ und μ, sodass $(7, -13, 1) = \lambda\, v_1 + \mu\, v_2$ ist.
   (a) Es gibt keine reelle Zahlen λ' und μ', sodass $(1, 0, 0) = \lambda'\, v_1 + \mu'\, v_2$ ist.

2. Der Raum der stetigen reellen Funktionen $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Warum?) Zeigen Sie: Die Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^{2x}$ sind linear unabhängig über $\mathcal{C}(\mathbb{R})$; d.h., aus $\lambda\, f + \mu\, g = 0$, wobei 0 die Nullfunktion ist, folgt $\lambda = \mu = 0$.

3. Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt
$$V \times W = \{(v, w)\ :\ v \in V, w \in W\}$$
mit den Operationen
$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w'), \qquad \lambda\,(v, w) = (\lambda w, \lambda v)$$
wieder ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

4. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Beweisen Sie: für $U, W \lhd V$ gilt: $U + W = \mathrm{Span}(U \cup W)$.
   Hinweis: Das Symbol $\lhd$ wird in Kapitel 02 und der Begriff Span *in Kapitel 03 definiert.*

5. Beschreiben Sie den von den Vektoren $v_1 = (1, 1, 0)$ und $v_2 = (-1, 2, 0)$ aufgespannten Raum $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$. Überprüfen Sie, ob die Vektoren $w_1 = (5, 3, 2)$ bzw. $w_2 = (0, 1, 2)$ in $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ liegen.

6. Betrachten Sie die Vektoren $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (i, 1, 0)$ und $v_3 = (1, 0, 1 + i)$ in $\mathbb{C}^3$. Sind v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig? Wie sieht $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$ aus?

7. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$ und $(0, 1, \alpha)$ in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Was passiert wenn noch ein vierter Vektor in Betracht gezogen wird?