Uebungsblatt 03 Lineare Algebra WS 2016/2017

1. Sei A nichtleere Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & A \subseteq \operatorname{Span}(A), \\ \text{(b)} & A \subseteq B \subseteq V \Rightarrow \operatorname{Span}(A) \subseteq \operatorname{Span}(B), \\ \text{(c)} & \operatorname{Span}(A) = \operatorname{Span}(\operatorname{Span}(A)). \end{array}$$

2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dimension ≥ 4, und seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in V$ linear unabhängig. Weiters sei $U = \operatorname{Span}(u_1, u_2, u_3)$ und $W = \operatorname{Span}(w_1, w_2)$, wobei

$$u_1 = a_1 + a_2, \quad u_2 = a_1 + a_3, \quad u_3 = a_3 - a_1, \qquad w_1 = a_1 + 2a_2, \quad w_2 = a_3 + a_4.$$

Zeigen Sie, dass $U \cap W \neq \{0\}$.

Der Begriff "Dimension" wird im Kapitel 04 (siehe TeachCenter) erklärt.

3. Kann die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden? Es ist die übliche Addition von Matrizen und Multiplikation mit Skalaren zu verwenden; d.h.,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}^*$ [1] und $v_1 = (a, b, 0)$, $v_2 = (0, a, b)$ und $v_3 = (b, 0, a)$ aus $\mathbb{R}^3$. Unter welchen Bedingungen an a und b ist v_3 eine Linearkombination von v_1 und v_2?

5. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$ und $v_3 = (0, 2, -1)$ aus $\mathbb{R}^3$. Kann der Vektor $w = (2, 2, 1)$ im Sinne des Austauschlemmas gegen den Vektor v_2 getauscht werden?

Das "Austauschlemma" wird in Kapitel 04 (siehe TeachCenter) formuliert.

[1] Es ist $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6. Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{K}$-Vektorraum V und sei weiters

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Zeigen Sie: Ist $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \neq 1$, dann sind die Vektoren

$$v_1 - v, \quad v_2 - v, \quad \ldots, \quad v_n - v$$

linear unabhängig.

7. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_1(x) := \cos x, \qquad f_2(x) := x \cos x, \qquad f_3(x) := x^2 \cos x$$

linear unabhängig sind.

8. Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiters sei

$$W = \mathrm{Span}(v_1, v_2), \qquad W' = \mathrm{Span}(v_3, v_4).$$

Welche Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ liegen in $W \cap W'$.