Uebungsblatt 04 Lineare Algebra WS 2016/2017

1. Welche Untervektorräume hat der anschauliche Raum $\mathbb{R}^3$? Charakterisieren Sie diese.

   Hinweis: In der VO wurde das Beispiel mit $\mathbb{R}^2$ gebracht. Hier wird die "Dimension" des Problems um 1 erhöht.

2. Ein homogenes lineares Gleichungssystem über den Körper $\mathbb{K}$ in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und m Gleichungen läßt sich schreiben als:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n &= 0, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n &= 0, \end{aligned} \qquad a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

   Jede Lösung $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ läßt sich als Punkt in $\mathbb{K}^n$ interpretieren. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{L}$ der Lösungen dieses Systems ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ bezüglich Superposition (Addition von Lösungen) und Skalierung von Lösungen ist.

   Hinweis: Der lange Weg besteht darin, alle Vektorraum-Axiome zu verifizieren. Der kurze Weg wurde in der VO erklärt und besteht darin, Resultate über Vektorräume und Untervektorräume geschickt auszunutzen.

3. Der Vektorraum $\mathbb{K}[X]$ der Polynome über einen beliebigen Körper $\mathbb{K}$ ist die Menge aller *Ausdrücke*

$$\mathbf{p} := a_n\,X^n + \cdots + a_1\,X + a_0, \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\{X^k | k \in \mathbb{N}_0\}$ mit $X^0 := 1$ und 1 die Eins in $\mathbb{K}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}[X]$ ist.

   (b) Begründen Sie, dass $\mathbb{K}[X]$ nicht endlich erzeugbar ist.

4. Betrachten Sie die Matrizen

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass diese Matrizen *hermitesch* [1] sind und eine Basis der Menge $M(2 \times 2, \mathbb{C})$ (alternative Notation: $\mathbb{C}^{2\times 2}$) aller 2×2 Matrizen über $\mathbb{C}$ bilden.

5. Zeigen Sie, dass alle hermiteschen 2×2 Matrizen über $\mathbb{C}$ die Form

$$\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ besitzt.

Hinweis: Ansatz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} + i\, b_{11} & a_{12} + i\, b_{12} \\ a_{21} + i\, b_{21} & a_{22} + i\, b_{22} \end{pmatrix}$ *mit* $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$.

[1] Eine quadratische komplexe Matrix $\mathbf{A} = (a_{jk}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *hermitesch*, wenn $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$ für alle $j, k = 1, \ldots, n$ gilt. Die Matrix $\mathbf{A}^\dagger = (\overline{a_{kj}})$ heißt die zu $\mathbf{A}$ adjungierte Matrix.