Uebungsblatt 05 Lineare Algebra WS 2016/2017

1. Wenden Sie auf die folgenden Matrizen geeignete elementare Zeilenumformungen an, sodass jeweils eine obere Dreiecksmatrix entsteht:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & |\alpha|^2 - 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

2. Bestimmen Sie durch Überführen in Zeilenstufenform eine Basis des Zeilenraumes und den Zeilenrang folgender Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Gegeben seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$:

   $\mathbf{v}_1 = (2, 0, 1, 3),\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2, 3),\ \mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 0),\ \mathbf{v}_4 = (0, -2, 1, 0),\ \mathbf{v}_5 = (1, 1, 1, 1).$

   Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$.

4. Untersuchen Sie unter Verwendung der Zeilenstufenform, ob die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = (i, -1, 2i), \qquad \mathbf{v}_2 = (1, i, 0), \qquad \mathbf{v}_3 = (1 + i, i, 2)$$

   des $\mathbb{C}^3$ linear unabhängig sind.

5. Für $c \in \mathbb{R}$ sei $\mathbb{M}_c$ die Menge aller *magischen Quadrate*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   mit der Eigenschaft, dass alle Zeilensummen Z_1, Z_2, Z_3, alle Spaltensummen S_1, S_2, S_3 und alle Hauptdiagonalsummen D_1, D_2 von $\mathbf{A}$ gleich c sind. Die Gesamtheit aller magischen 3×3 Quadrate ist dann die Menge

$$\mathbb{M} := \bigcup_{c\in\mathbb{R}} \mathbb{M}_c.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{M}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Trifft das auch auf $\mathbb{M}_c$ zu?

(*) Es sollen alle möglichen magische Quadrate zu einem vorgegebenen $c \in \mathbb{R}$ bestimmt werden. Weiters soll eine Basis von $\mathbb{M} \triangleleft \mathbb{R}^{3\times 3}$ angegeben werden.

Hinweis: Zeigen Sie $D_1 + D_2 + Z_2 + S_2 = Z_1 + Z_2 + Z_3 + 3a_{22}$ und folgern Sie $a_{22} = c/3$ und dass jedes magische Quadrat $\mathbf{A}$ bereits durch die erste Zeile, d.h. durch die Zerlegung von c in die Summe $c = a_{11} + a_{12} + a_{13}$, festgelegt ist. Damit läßt sich leicht eine Basis von $\mathbb{M}$ bestimmen, die noch zu

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verschönert werden kann (zeigen Sie, dass diese magischen Quadrate tatsächlich eine Basis von $\mathbb{M}$ bilden).

6. Seien f und g aus dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{D}(I)$ der auf dem Intervall $I = (-1, 1)$ differenzierbaren reellen Funktionen.

   (a) Zeigen Sie die folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} f \text{ und } g \text{ l.a. in } \mathcal{D}(I) \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \text{ l.a. in } \mathcal{D}(I) \times \mathrm{Abb}(I, I) \\ &\Longrightarrow \quad fg' - f'g = \mathbf{0} \text{ in } \mathcal{D}(I). \end{aligned} \tag{1}$$

   (b) Benützen Sie (1) um zu begründen, dass aus

$$W(f,g)(x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} := f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0 \qquad \text{für ein } x \in I$$

   folgt, dass f und g l.u. Funktionen in $\mathcal{D}(I)$ sind.

   (c) Zeigen Sie, dass die Wronskische Determinante $W(f, g)$ der reellen Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x|x|$ überall in $\mathbb{R}$ verschwindet, jedoch die beiden Funktionen f und g l.u. in jedem offenen Interval mit der 0 sind.
   Worauf will dieses Beispiel hinaus? Was wird gezeigt?

Hinweis: Unterscheiden Sie sorgfältig zwischen dem Rechnen mit den Elementen aus den Vektorräumen und dem Rechnen mit den zugehörigen Funktionen; z.B., "f, g l.a. in $\mathcal{D}(I)$" bedeuted definitionsgemäß, es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, sodass

$$\lambda\, f + \mu\, g = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{0} \textit{ die Nullfunktion})$$

was äquivalent ist mit

$$\lambda\, f(x) + \mu\, g(x) = 0 \qquad \textit{für alle } x \in I$$

im Funktionenbild.