Uebungsblatt 06 Lineare Algebra WS 2016/2017

1. Sei X eine beliebige nichtleere Menge und $\varphi : X \to X$ eine beliebige Abbildung.
   Zeigen Sie: Die Abbildung $F : \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$ mit $f \mapsto f \circ \varphi$ ist linear.

2. Wie lautet die durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & i \\ 5 & -4 \\ 2i & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 2}$$

   in natürlicher Weise definierte lineare Abbildung F? Bestimmen Sie $F(i, i)$.

3. Für die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gelte

$$F(1, 1, 1) = 3, \qquad F(0, 1, -2) = 1, \qquad F(0, 0, 1) = -2. \tag{1}$$

   (a) Gibt es eine/genau eine lineare Abbildung, die durch diese Abbildungsvorschrift festgelegt ist?

   (b) Falls ja, bestimmen Sie $F(x_1, x_2, x_3)$ für $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

   (c) Es soll zusätzlich zu (1) die Vorschrift $F(3, 5, 0) = 2017$ gelten. Ist F linear?

4. Zeigen Sie, dass **jede** lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Form

$$F(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \qquad \text{für } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

   hat, wobei $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein geeigneter fester Vektor ist.

5. In der VO wurde gezeigt, dass eine lineare Abbildung $F : V \to W$ in eindeutiger Weise durch die Vorgabe der Bilder einer Basis $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ von V festgelegt ist; d.h.,

$$F(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i \qquad \text{für alle } i \in I,$$

   wobei $(\mathbf{w}_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie in W sein kann.

   Gilt dieses Resultat auch dann, wenn $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem, jedoch **keine** Basis, von V ist?

6. Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $F : V \to W$ linear und bijektiv.
Zeigen Sie, dass dann auch die *Umkehrfunktion* $F^{(-1)} : W \to V$ linear ist; d.h.,

$$F^{(-1)}(\lambda\, \mathbf{w} + \lambda'\, \mathbf{w}') = \lambda\, F^{(-1)}(\mathbf{w}) + \lambda'\, F^{(-1)}(\mathbf{w}') \quad \text{für } \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W \text{ und } \lambda, \lambda' \in \mathbb{K}.$$

7. Sei $F : V \to W$ linear und $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis von V. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Span}(F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)).$$ [1]

8. Gegeben sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3, x_1 + 2x_3)\,, \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Ker}(F)$ und $\mathrm{Im}(F)$ (Definition, siehe Fußnote) und verifizieren Sie die *Dimensionsformel*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(F) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(F). \tag{2}$$

Hinweis: Das Bild von F wird von den Bildern der kanonischen Basisvektoren von V aufgespannt.

9. Es sei $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ gegeben durch

$$F(a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3) := a_1 - a_0 + a_2\, t + a_3\, t^2.$$

   (a) Zeigen Sie, dass F eine lineare Abbildung ist.

   (b) Unter Verwendung der Dimensionsformel (2) bestimmen Sie zuerst den Kern von F und danach das Bild von F.

---

[1] Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann ist

$$\mathrm{Ker}(F) := F^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{v} \in V \big| F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \lhd V$$

der *Kern* von F und

$$\mathrm{Im}(F) := F(V) = \{F(\mathbf{v}) \big| \mathbf{v} \in V\} \lhd W$$

das *Bild* von F. (Siehe Kapitel 07.)