Uebungsblatt 07 Lineare Algebra WS 2016/2017

1. Sei $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ gegeben durch $F(z, w) = (-iw, iz)$.

   (a) Weisen Sie nach, dass F ein Homomorphismus ist.

   (b) Bestimmen Sie Basen von Kern und Bild von F.

2. Sei $F : V \to W$ ein Homomorphismus mit $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n$.

   Zeigen Sie, unter der Verwendung der Dimensionsformel (siehe Uebungsblatt 06):

   $$F \text{ injektiv} \quad \Longrightarrow \quad F \text{ bijektiv}$$

   und

   $$F \text{ surjektiv} \quad \Longrightarrow \quad F \text{ bijektiv.}$$

   Sei $\mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der Polynome über den Körper $\mathbb{R}$ (siehe Uebungsblatt 04). Die Familie der Monome, $(X^k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (1, X, X^2, X^3, \ldots)$, ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]$. Sei F jene lineare Abbildung, die durch $F(X^n) = X^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ festgelegt ist. Zeigen Sie, dass F injektiv ist aber nicht bijektiv.

3. Gegeben seien der Vektorraum V mit Basis $\mathcal{A} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ und der Vektorraum W mit Basis $\mathcal{B} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$. We lautet die durch die Matrix

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   definierte lineare Abbildung $F : V \to W$? Bestimmen Sie $F(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ und Ker$F$. Ist F injektiv bzw. surjektiv?

4. Gegeben sind die Matrizen

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

   Hinweis: Die Matrix-Multiplikation ist in Kapitel 08 (TeachCenter) definiert.

5. Setzen Sie
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

   (a) Berechnen Sie das Matrix-Produkt
   $$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X},$$
   wobei $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ die zu $\mathbf{X}$ transponierte Matrix ist (siehe Kapitel 08).

   (b) Setzen Sie $b = 0$ und interpretieren Sie die Gleichung
   $$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = f \qquad f \in \mathbb{R} \text{ fest.} \tag{1}$$

   (c) Ersetzen Sie in (1) die Matrix $\mathbf{X}$ durch $\mathbf{R}_{\pi/3} \cdot \mathbf{Z}$, wobei
   $$\mathbf{R}_\phi := \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad -\pi < \phi \leq \pi, \qquad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$
   Finden Sie die Matrix $\mathbf{B}$, sodass aus (1) die Gleichung
   $$\mathbf{Z}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Z} = f \qquad f \in \mathbb{R} \text{ fest}$$
   wird. Was bewirkt die Substitution, geben Sie eine graphische Interpretation.

   (d) Multiplizieren Sie die von Ihnen gefundene Matrix $\mathbf{B}$ mit den Spalten von $\mathbf{R}_{\pi/3}^{\mathrm{T}}$ (aufgefasst als 2×1-Matrizen). Was erhalten Sie?

6. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine *idempotente Matrix*; d.h., $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, und $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ der zugehörige Homomorphismus mit $F(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (Matrix-Vektor Multiplikation, s. VO). $\mathrm{Id}_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sei die identische Abbildung. Beweisen Sie:
$$\mathrm{Ker}F = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_n - F) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}F \oplus \mathrm{Im}F.$$