Uebungsblatt 08 Lineare Algebra WS 2016/2017

1. Gegeben seien der Vektorraum V mit Basis $\mathcal{A} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ und der Vektorraum W mit Basis $\mathcal{B} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$. Die lineare Abbildung $F : V \to W$ sei gegeben durch

$$F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3, \quad F(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 + 5\mathbf{w}_3, \quad F(\mathbf{v}_3) = 6\mathbf{w}_1 + 7\mathbf{w}_2 + 8\mathbf{w}_3.$$

   (a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix (bezeichnet durch $\mathbf{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$) von F.

   (b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von F.

   (c) Untersuchen Sie, ob F injektiv bzw. surjektiv ist.

   (d) Sei $\mathbf{v} \in V$ beliebig und $\mathbf{v} = a_1\,\mathbf{v}_1 + a_2\,\mathbf{v}_2 + a_3\,\mathbf{v}_3$. Interpretieren Sie das Matrix-Vektor Produkt (cf. Kapitel 09, Koordinatensysteme).

$$\mathbf{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

2. Sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z).$$

   (a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathbf{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$, wobei

$$\mathcal{A} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = ((1, 3), (2, 5)).$$

   (b) Zeigen Sie, dass der Spaltenrang von $\mathbf{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ gleich 2 ist, und damit F surjektiv.

3. Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen die inverse Matrix:[1]

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

[1] *Hinweis: In der VO wurde kurz auf den Algorithmus eingegangen:*

(a) Schreiben Sie Ausgangsmatrix (links) und Einheitsmatrix (rechts) nebeneinander als grosse Matrix.

(b) Bringen Sie die erweiterte Matrix auf Zeilen-Stufen Form und stellen Sie fest, ob die Matrix invertierbar ist.

(c) Ist die Matrix invertierbar, führen Sie weitere elementare Zeilenumformungen durch, sodass sich als linke Teilmatrix eine Diagonalmatrix mit lauter Einträgen 1 auf der Hauptdiagonale ergibt.

(d) Die rechte Teilmatrix ist die Inverse zur Ausgangsmatrix.

4. Besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 2\,x_2 - 3\,x_3 &= 0 \\ -3\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

eine nichttriviale Lösung? Falls ja, bestimmen Sie diese.

5. Bestimmen Sie den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, wobei

$$\text{(a)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Untersuchen Sie die folgenden inhomogenen Gleichungssystem auf Lösbarkeit und bestimmen Sie, falls möglich, die allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

7. Bestimmen Sie jene $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2\alpha\,x_1 + \alpha\,x_2 + 9\,x_3 &= 6 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 + \alpha\,x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(i) keine Lösung, (ii) eine eindeutig bestimmte Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

Bestimmen Sie konkret die Lösung für $\alpha = 1$.

In Beispielen 5 und 6 genügt es für ein Kreuz, dass eines der beiden gegebenen Teilaufgaben gemacht wird.