Uebungsblatt 09 Lineare Algebra WS 2016/2017

1. Gegeben sei die Matrix
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie Matrizen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{T}^{-1}$ so, dass[1]
$$\mathbf{S}\,\mathbf{A}\,\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Determinantenrechnung, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Vektoren
$$(1, 2, 1), \qquad (1, \alpha, -3), \qquad (1, 0, \alpha)$$
linear abhängig sind. (Siehe Kapitel 16.)

3. Bestimmen Sie die Determinante von
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
   (a) durch vorheriges Überführen von $\mathbf{A}$ in ein eine Matrix in Zeilenstufenform.
   (b) durch Entwicklung nach der zweiten Spalte und nachfolgender Anwendung der Regel von Sarrus.
   (c) **(Zusatz)** durch fortgesetzte Entwicklung nach geeigneten Zeilen/Spalten und ggf. unter Zuhilfenahme von einzelnen elementaren Zeilenumformungen.

[1] *Hinweis: Es bezeichen* Id_n *die* $n \times n$*-Einheitsmatrix mit lauter* 1*en auf der Hauptdiagonalen. (i) Durch elementare* **Zeilen***umformungen führen Sie die erweiterte Matrix* $(\mathbf{A}, \mathrm{Id}_2)$ *in* $(\mathbf{A}', *)$ *über, sodass* $\mathbf{A}'$ *in Zeilenstufenform vorliegt. Die Matrix* $*$ *ist die gesuchte Matrix* $\mathbf{S}$*. — Warum? (ii) Durch elementare* **Spalten***umformungen führen Sie die erweiterte Matrix* $\begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathrm{Id}_3 \end{pmatrix}$ *in die Form* $\begin{pmatrix} \mathbf{A}'' \\ ** \end{pmatrix}$ *über, sodass* $\mathbf{A}''$ *die Matrix auf der rechten Seite in* (1) *ist. Matrix* $**$ *ist die gesuchte Matrix* $\mathbf{T}^{-1}$*. — Warum?*

4. Gegeben sind die folgenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von **A** und **B**.

(b) Sind die Matrizen **A** bzw. **B** diagonalisierbar? (Siehe Kapitel 17.)

5. Gegeben sind die folgenden Matrizen aus $\mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von **A** und **B**.

(b) Sind die Matrizen **A** bzw. **B** diagonalisierbar? (Siehe Kapitel 17.)

6. Bestimmen Sie zu den Matrizen **A** in (2) und (3) jeweils eine Matrix **S** so, dass $\mathbf{S}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S}^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

7. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathrm{s} : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{s}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 - x_3\,y_3$.

(a) Um welche Form handelt es sich hier?

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von s bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} = ((-1,0,1),(0,1,-1),(1,1,0)).$$

(c) Ist s positive definit? Ist s nicht ausgeartet?

Hinweis: Siehe Ende von Kapitel 18.

8. Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Schmidt auf folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$ an:

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \qquad \mathbf{v}_2 = (1,0,-1), \qquad \mathbf{v}_3 = (1,-1,0).$$