# Diskrete Mathematik, WS 2017/2018, 11. Übungsblatt

65. Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $M \subseteq E$ ein Matching in $G$. Dann gibt es ein Matching $M'$ mit maximaler Kardinalität, das alle von $M$ gematchten Knoten matcht.

    Hinweis: Falls $M$ kein Matching mit maximaler Kardinalität ist, dann betrachten Sie einen Teilgraphen von $G$ mit Kontenmenge $V$ und Kantenmenge gegeben durch die symmetrische Differenz $M \Delta M'$, wobei $M'$ ein Matching mit maximaler Kardinalität in $G$ ist. Analysieren Sie die Strukutur der Zusammenhangskomponenten dieses Teilgraphen und „basteln" Sie aus $M$ und $M'$ ein Matching mit maximaler Kardinalität, die alle von $M$ gematchten Knoten matcht.

66. Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $M_1$, $M_2$ zwei maximale Matchings bezüglich Inklusion. Dann gilt $|M_1| \leq 2|M_2|$.

    Hinweis: Nehmen Sie o.B.d.A. an, dass $|M_1| \geq |M_2|$. Betrachten Sie einen Teilgraphen von $G$ mit Kontenmenge $V$ und Kantenmenge gegeben durch die symmetrische Differenz $M_1 \Delta M_2$. Analysieren Sie die Strukutur der Zusammenhangskomponenten dieses Teilgraphen und folgern daraus eine obere Schranke für $|M_1| - |M_2|$.

67. Zeigen Sie: Sei $r \geq 1$ und $G = (A \cup B, E)$ ein $r$-regulärer bipartiter Graph. Dann lässt sich die Kantenmenge $E$ in $r$ disjunkte perfekte Matchings partitionieren.

68. Sei $G$ ein bipartiter Graph, der auf beiden Seiten dieselbe Anzahl von Knoten hat. Nehmen wir an, jede nicht-leere echte Teilmenge $A$ auf der linken Seite hat mindestens $|A| + 1$ Nachbarn auf der rechten Seite. Beweisen Sie, dass es für jede Kante $e$ von $G$, ein perfektes Matching von $G$ gibt, das die Kante $e$ enthält.

69. Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ die Gleichung $ab = ggT(a, b)kgV(a, b)$ gilt.

70. * Sei $p$ eine Primzahl. Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sei

    $$v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \mid n\} \quad .$$

    Wie kann man $v_p(n)$ aus der Primfaktorzerlegung von $|n|$ ablesen?

    Zeigen Sie: Ist $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und sind $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $r = a/b = c/d$ , so gilt $v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$. Wir können daher durch $v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b)$, $a$, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, eine Funktion $v_p \colon \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ definieren.

    Zeigen Sie, dass $v_p$ folgende Eigenschaften besitzt:

    (a) $v_p(rs) = v_p(r) + v_p(s)$ für alle $r$, $s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

    (b) Für $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt genau dann $r \in \mathbb{Z}$, wenn $v_p(r) \geq 0$ für alle Primzahlen $p$ ist.

    (c) Sind $r$, $s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $r + s \neq 0$, so gilt $v_p(r + s) \geq \min\{v_p(r), v_p(s)\}$. Ist $v_p(r) \neq v_p(s)$, so gilt sogar Gleichheit.

---

*Für Ambitionierte