Diskrete Mathematik, WS 2017/2018, 13. Übungsblatt

76. Bestimmen Sie $x^{(13^{25})}\,(mod\,13)$.

77. Seien a, $b \in \mathbb{Z}$, m, $n \in \mathbb{N}$ und $d = \mathrm{ggT}(m,n)$. Zeigen Sie, dass das System

$$x \equiv a\,(mod\,m)$$
$$x \equiv b\,(mod\,n)$$

genau dann lösbar ist, wenn $a \equiv b\,(mod\,d)$ gilt.

78. Sei $m \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl mit Primfaktorenzerlegung $m = \Pi_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$, mit $r \in \mathbb{N}$, Primzahlen p_i und $e_i \in \mathbb{N}$, für $i \in \{1,2,\ldots,r\}$. Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^2 \equiv 1\,(mod\,m)$ in $\mathbb{Z}_m$.

    Hinweis: Beobachten Sie, dass $p_i^{e_i}$ entweder ein Teiler von $(x-1)$ oder ein Teiler von $(x+1)$ ist, $\forall i \in \{1,2,\ldots,r\}$. Verwenden Sie den Chinesischen Restsatz.

79. (a) Wenden Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus an um $ggT(65,77)$ zu bestimmen.
    (b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$x \equiv 2\,(mod\,77)$$
$$x \equiv 7\,(mod\,65) \quad .$$

80. Beweisen Sie, dass für alle Primzahlen p und für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die folgende Gleichung gilt

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p\,(mod\,p)$$

81. Beweisen Sie $n^5 - n \equiv 0\,(mod\,30)$.