Diskrete Mathematik, WS 2017/2018, 2. Übungsblatt

9. Sei $M = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ und R jene Relation auf M, die durch $iRj \Leftrightarrow |i| \geq |j|$ definiert ist. Ist diese Relation eine Äquivalenzrelation, eine Ordnungsrelation, beides, oder keines von beiden? ($|i|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente der Menge i.)

10. Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen $R \subseteq A \times A$ transitiv, reflexiv, symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen? Bestimmen Sie für diese die Äquivalenzklassen und weisen nach, dass die Äquivalenzklassen eine Zerlegung der Menge A bilden. Welche Relationen sind Ordnungsrelationen?

    (a) $A = \mathbb{N}_* = \{0, 1, 2, \ldots, \mathrm{n}, \ldots\}$ und $i\,R\,j \;\Leftrightarrow (i = j) \vee (\exists x \in \mathbb{N} : \mathrm{x} < \mathrm{i} \wedge \mathrm{x} < \mathrm{j})$.
    Wie üblich bezeichnen wir hier mit $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

    (b) $A = \mathbb{N}_* = \{0, 1, 2, \ldots, \mathrm{n}, \ldots\}$ und $R = \{(i, i+1)\,|i \in \mathbb{N}_*\}$.

11. Wir schreiben $a|b$ für die Teilerrelation:

$$a|b \text{ („}a\text{ teilt }b\text{“)} \Leftrightarrow \text{es gibt eine ganze Zahl } x\text{, sodass } b = a \cdot x \text{ ist}$$

    Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen und welche sind Ordnungsrelationen?

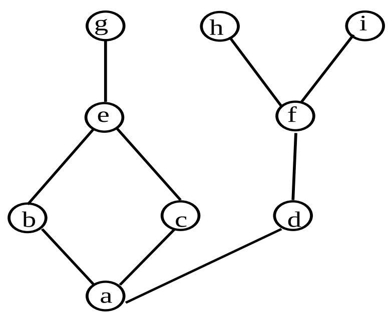
    (a) Die Teilerrelation auf dem Intervall $[2, 3] = \{x \in \mathbb{R}\,|2 \leq \mathrm{x} \leq 3\}$.

    (b) Die Teilerrelation auf der Menge $\{x \in \mathbb{N}\,|\mathrm{x} \geq 2\}$.

    (c) Die Teilerrelation auf der Menge $\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

12. Eine *Partialordnung* $(X, \preceq)$ ist ein geordnetes Paar bestehend aus einer Menge X und einer Ordnungsrelation $\preceq$ in X. Falls X endlich ist, dann kann eine Partialordnung graphisch durch ein sogenanntes *Hasse-Diagramm* wie folgt dargestellt werden. Jedes Element aus X wird als Punkt in der Ebene dargestellt, wobei unterschiedliche Elemente durch unterschiedliche Punkte dargestellt werden. Die Punkte, die zwei Elemente $a, b \in X$, $a \neq b$, darstellen, werden dann und nur dann durch eine Linie von a nach b (meistens ein Geradenstück) verbunden, wenn $a \preceq b$ gilt und es kein $c \in X$ mit $a \preceq c \preceq b$ und $c \notin \{a, b\}$ gibt. Dabei wird der dem Element b entsprechender Punkt, oberhalb vom dem Punkt, der dem Element a entspricht gezeichnet, sodass es nicht notwendig ist, die Richtungen der Linien (von unten nach oben) explizit darzustellen. Die Elemente (a, a) der Relation, $a \in X$, werden nicht graphisch dargestellt. Unter Bercksichtigung der Eigenschaften Reflexivität und der Transitivität definiert ein Hasse-Diagramm eine eindeutige Partialordnung.

    Betrachten Sie nun die Partialordnung, die durch folgendes Hasse-Diagramm definiert wird.



    Bestimmen Sie das kleinste/größte Element, das Supremum und Infimum (falls vorhanden), sowie alle Maxima und Minima der Teilmenge $\{e, f\}$.

13. Auf der Menge $M = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ist die Relation $R \subseteq M \times M$ definiert durch

$$aRb \Leftrightarrow (a - b) \leq 0 \text{ und } a - b \text{ ist gerade.}$$

(a) Zeigen Sie, dass R eine Ordnungsrelation auf M ist.

(b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für diese Partialordnung.

(c) Sei $Y = \{-3, -2, 0, 1, 2, 4\}$. Bestimmen Sie (falls vorhanden) das größte Element, alle minimalen Elemente und das Infimum der Menge Y.

14. Sei R eine Relation zwischen A und B, d.h. $R \subseteq A \times B$. R heißt *linkstotal* dann und nur dann, wenn $\forall a \in A$, $\exists b \in B$ mit aRb. R heißt *rechtstotal* dann und nur dann, wenn $\forall b \in B$, $\exists a \in A$ mit aRb. R heißt *rechtseindeutig* dann und nur dann, wenn $\forall a \in A$, $\forall b_1, b_2 \in B$, $(aRb_1) \wedge (aRb_2) \to b_1 = b_2$. R heißt *linkseindeutig* dann und nur dann, wenn $\forall a_1, a_2 \in A$, $\forall b \in B$, $(a_1Rb) \wedge (a_2Rb) \to a_1 = a_2$. R heißt *eindeutig* dann und nur dann, wenn R linkseindeutig und rechtseindeutig ist.

    Stellen Sie fest, ob die folgende Relation $R \subseteq A \times B$ linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig ist. Stellen Sie weiter fest ob R einer Funktion $f\colon A \to B$ mit $\{(a, f(a))\colon a \in A\} = R$ entspricht. Stellen Sie ggf. fest, ob die der Relation entsprechende Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

    (a) $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $R = \{(i, j) \in A \times B\colon i = j^2\}$.

    (b) $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $R = \{(i, j) \in A \times B\colon i = i \cdot j\}$

    (c) $A = B = \{0, -2, 2, -4, 4\}$ und $R = \{(i, j) \in A \times B\colon i = j^2\}$

    (d) $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{0, 2, 1\}$ und $R = \{(i, j) \in A \times B\colon i = j^2\}$

15. Sei $R \subseteq A \times B$ eine linkstotale, rechtseindeutige Relation zwischen A und B. Zeigen Sie, dass die Relation R einer Funktion $f\colon A \to B$ mit $\{(a, f(a))\colon a \in A\} = R$ entspricht. Welche Eigenschaft der Relation R (vgl. Beispiel 14) entspricht der Surjektivität, Injektivität bzw. Bijektivität von f? Geben Sie eine mathematisch korrekte Begründung Ihrer Antwort.

16. Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Wir definieren mit Hilfe von f die Relation $\sim$ auf A, sodass $\forall i, j \in A$, $(i \sim j) \Leftrightarrow (f(i) = f(j))$.

    (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

    (b) Es sei $\{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{0\}\}$ eine Zerlegung der Menge $A = \{0, 1, \ldots, 7\}$. Bestimmen Sie eine Funktion $f\colon A \to B$ mit einer geeigneten Menge B, sodass $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{0\}$ die Äquivalenzklassen der oben gegebenen Relation $\sim$ sind.

    (c) Gibt es zu jeder Zerlegung von A eine passende Funktion f, sodass die Äquivalenzklassen der dazugehörigen Äquivalenzrelation $\sim$ genau diese Zerlegung induzieren?