Diskrete Mathematik, WS 2017/2018, 5. Übungsblatt

32. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ ein aufsteigende Folge paarweise verschiedener natürlicher Zahlen ≤ 100. Wir betrachten die Differenzen $a_i - a_j$ für $1 \leq j < i \leq 21$. Beweisen Sie, das unter diesen Differenzen ein Wert mindestens dreimal vorkommt.

33. Zeigen Sie folgende Identitätsgleichung über die Stirlingzahlen zweiter Art:
$$S_{n,n-2} = n(n-1)(n-2)(3n-5)/24 \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

34. Ziegen Sie, dass die Bellzahlen für $n \geq 0$ die Rekursionsgleichung $B_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ erfüllen. (Ein kombinatorischer Beweis wird bevorzugt.)

35. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $g = (261) \circ (458) \circ (39)$ sind Permutationen der Menge $[9] := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

    (a) Stellen Sie f in Zyklenschreibweise dar.

    (b) Stellen Sie g in Standardschreibweise (als Abbildungstabelle) dar.

    (c) Berechnen Sie f^{-1}, g^2, g^3, g^{-1}, g^{999} und $f \circ g$, wobei f^{-1} die Inversepermutation zu f ist, d.h. $f^{-1}(i) = j$ dann und genau dann wenn $f(j) = i$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Weiters gilt $g^2 := g \circ g$ und $g^3 := g \circ g \circ g$.

    (d) Geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $s_{n,1}$ an.

36. (*Die Derangement-Zahlen*)
Zu einem Empfang sind n Damen geladen. Jede Dame trägt einen Hut und gibt diesen bei der Garderobe ab. Bei der Rückgabe ist der Garderobenmann nicht ganz bei der Sache und gibt die Hute nach dem Zufallsprinzip zurück. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt keine der Damen den richtigen Hut zurück?
Hinweis: Verwenden Sie Inklusion/Exklusion! Die gesuchte Wahrscheinlichkeit soll als Linearkombination der Quotienten $1/k!$ für $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ angegeben werden.
Die Derangement-Zahl D_n ist definiert als die Anzahl der *fixpunktfreien* Permutationen $\pi\colon [n] \to [n]$, d.h. die Anzahl der Permutationen in $\mathfrak{S}_n$ für die gilt $\pi(i) \neq i$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} =: [n]$. Es ist nicht einfach D_n direkt zu bestimmen, stattdessen kann man zuerst die Anzahl der Permutationen, die mindestens einen Fixpunkt haben, bestimmen.