

Diskrete Mathematik, WS 2017/2018, 8. Übungsblatt

48. (a) Finden Sie alle Graphen mit ≤ 6 Knoten, in denen jeder Knoten den Grad 2 hat.
(b) Finden Sie alle paarweise nicht isomorphen Bäume mit 5 Knoten.
49. Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^C = (V, E')$, wobei E' genau jene Kanten enthält, die nicht in E vorkommen.
- (a) Zeigen Sie: Wenn zwei Graphen isomorph sind, so sind auch ihre Komplemente isomorph.
(b) Wie viele Kanten hat ein Graph mit n Knoten der zu seinem Komplement isomorph ist? Kann ein Graph mit 10 Knoten zu seinem Komplement isomorph sein?
50. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$ mit $\deg(v) \neq 2$ für alle $v \in V$ und $|V| \geq 3$ einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens zwei Blättern benachbart ist.
51. Sei d_1, d_2, \dots, d_n eine Folge positiver natürlicher Zahlen. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Baum mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und $\deg(v_i) = d_i$, für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, gibt, wenn $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$.
52. Eine Brücke in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$, für die der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht mehr zusammenhängend ist. Beweisen oder widerlegen Sie: Ein Graph, in dem alle Knoten geraden Grad haben, enthält keine Brücke.
53. Ein *dreiecksfreier Graph* ist ein Graph, der keinen Kreis (Zyklus) der Länge 3 enthält. Es sei $G = (V, E)$ ein dreiecksfreier Graph. Beweisen Sie:
- (a) Ist $|V| = 2n$, so gilt $|E| \leq n^2$.
(b) Ist $|V| = 2n$ und $|E| = n^2$, so ist G der vollständige bipartite Graph $K_{n,n}$.

Hinweis: Der Beweis kann mit Induktion bzgl. der Knotenanzahl geführt werden