

Diskrete Mathematik, WS 2017/2018, 9. Übungsblatt

54. Eine offene Euler-Tour in einem Graphen ist eine Wanderung, die jede Kante des Graphen genau einmal enthält und deren Anfangs- und Endknoten verschieden sind. Stellen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass ein Graph eine offene Euler-Tour enthält. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an den beiden Graphen in Abbildung 1.
55. Der vollständige bipartite Graph $K_{a,b}$ besteht aus der Knotenmenge $A \cup B$ mit $|A| = a \geq 1$ und $|B| = b \geq 1$, sodass $A \cap B = \emptyset$ und aus allen Kanten $\{a, b\}$ mit $a \in A$ und $b \in B$.
- Charakterisieren Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, für die $K_{a,b}$ einen Eulerschen Kreis besitzt.
 - Charakterisieren Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, für die $K_{a,b}$ einen Hamiltonschen Kreis besitzt.
56. Beweisen oder widerlegen Sie (mit Hilfe eines Gegenbeispiels) folgende Aussage: Falls für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ die Ungleichung $|E| \leq 3(|V| - 2)$ gilt, dann ist G planar.
57. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen d , für die die folgende Aussage gilt: Wenn in einem Graphen $G = (V, E)$ jeder Knoten $\text{Grad} \leq d$ hat, so ist G ein planarer Graph.
58. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
- Jeder zusammenhängende, planare, k -reguläre Graph $G = (V, E)$ besitzt $\frac{4+(k-2)|V|}{2}$ Flächen.
 - Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 12$ und G^c der Komplementgraph von G . Dann sind entweder G oder G^c nicht planar.
 - Ein vollständiger 3-partiter Graph $K_{r,s,t}$ ist ein 3-partiter Graph mit $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, $|V_3| = t$ und jeder Knoten in V_i ist mit jedem Knoten in V_j für $i \neq j$ verbunden. Für jedes $n \geq 1$ ist der vollständige 3-partite Graph $K_{n,2n,3n}$ Hamiltonsch, aber $K_{n,2n,3n+1}$ ist nicht Hamiltonsch.
 - Wenn man zu einem beliebigen Baum drei Kanten hinzugibt, so ist der entstehende Graph planar.
59. Ist der Petersen-Graph (siehe Abbildung 2) planar bzw. Hamiltonsch? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

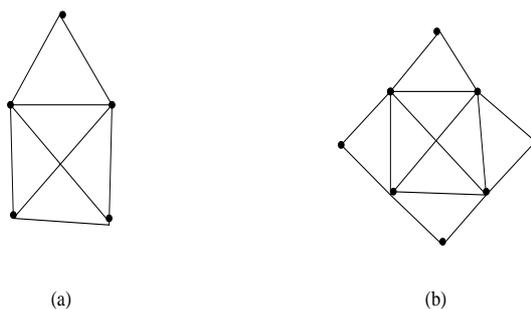


Abbildung 1: Graphen für Aufgabe 54

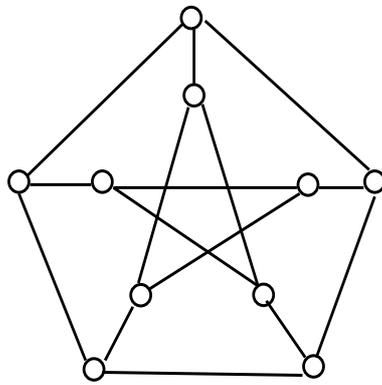


Abbildung 2: Der Petersen-Graph (Aufgabe 59)