Kombinatorische Optimierung 1, WS 2018-2019

1. Übungsblatt

0. Bitte lesen (und verinnerlichen!) Sie „Die Laufzeit von Algorithmen“ aus

   B. Korte und J. Vygen, Kombinatorische Optimierung: Theorie und Algorithmen, Springer, 2012, Abschnitt 1.2, S. 6-7.

   Dieses Buch ist im TUGraz Campus unter folgendem Link frei verfügbar.

   `http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-25401-7`

   Insebesonde wird in Übungsbeispiel 2 der Begriff der „in polynomieller (linearer) Zeit berechenbaren Funktion“ benötigt. Eine *in polynomieller Zeit berechenbare Funktion* wird hier definiert als eine Funktion, die mit einem polynomiellen Algorithmus berechnet wird. Weiters heißt eine Funktion *in linearer Zeit berechenbar*, wenn sie von einem Linearzeit-Algorithmus (vgl. Definition in der obengenannten Literaturquelle) berechnet wird.

1. Sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter) Graph, $c\colon E \to \mathbb{R}$ eine Kantengewichtsfunktion und $T = (V, E')$ ein Spannbaum in G. Zeigen Sie, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

   (1) T ist ein minimaler Spannbaum (d.h. ein Spannbaum mit minimalem Gewicht) in G.

   (2) $\forall e = \{x, y\} \in E \setminus E'$ gilt: keine Kante des (eindeutigen) (x, y)-Weges in T hat ein höheres Gewicht als e.

   (3) $\forall e \in E'$ gilt: Ist C eine der zwei Zusammenhangskomponenten von $T - e$, so ist e eine Kante mit minimalem Gewicht im Schnitt $\delta(V(C))$.

   Zur Erinerung:

   - $\forall X \subset V(G)$ ist der Schnitt $\delta(X)$ folgendermaßen definiert
   $$\delta(X) := \Big\{\{u, v\} \in E(G)\colon u \in X, v \notin X\Big\}.$$
   - Für einen Graphen G und eine Kante $e \in E(G)$ bezeichnet $G - e$ den Gaphen G', der nach der Entfernung der Kante e aus G entsteht, d.h. $G' := \Big(V(G), E(G) \setminus \{e\}\Big)$.

2. Das Maximale-Wald-Problem (MWP)

   Eine Instanz des MWP wird durch einen (ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ und einer Kantengewichtsfunktion $c\colon E \to \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht wird ein Wald mit maximalem Gewicht in G. Zeigen Sie, dass das Minimale-Spannbaum-Problem und das Maximale-Wald-Problem äquivalent sind, wobei die Äquivalenz von Problemen wie folgt definiert ist.

   Ein Problem P heißt *in linearer Zeit reduzierbar* auf ein Problem Q, wenn es zwei in linearer Zeit berechenbare Funktionen f und g gibt, so dass f eine Instanz x von P in eine Instanz $f(x)$ von Q transformiert und g eine (optimale) Lösung von $f(x)$ in eine (optimale) Lösung von x transformiert. Ist P linear reduzierbar auf Q und Q linear reduzierbar auf P, so heißen die Probleme P und Q *äquivalent*.

3. Für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{R}$ soll ein zusammenhängender aufspannender Teilgraph minimalen Gewichtes bestimmt werden. Kann dieses Problem effizient, d.h. mit einem polynomiellen Algorithmus, gelöst werden? Wie?

4. Gesucht ist die Menge derjenigen Kanten e in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{R}$, für die es einen enthaltenden spannenden Baum minimalen Gewichtes in G gibt (oder anders ausgedruckt, man möchte die Vereinigung aller aufspannenden Bäume minimalen Gewichtes in G bestimmen). Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems an und analysieren Sie die Zeitkomplexität Ihres Algorithmus.

5. *Das Engpass-Spannbaum-Problem (bottleneck MST)*
   Für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c: E \to \mathbb{R}$ soll ein spannender Baum T gefunden werden, mit der Eigenschaft, dass das Gewicht der schwersten Kante in T so gering wie möglich ist. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems an und analysieren Sie die Zeitkomplexität ihres Algorithmus.

6. Bestimmen Sie mit Hilde des Branching Algorithmus von Edmonds ein maximales Branching für den Graphen in Abbildung 1.

7. Die Laplace Matrix und der Kirchhoff'sche Matrix-Baum-Satz (Anwendungen)
   Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ und sei $L(G)$ die Laplace Matrix von G, d.h. $L(G) = D(G) - A(G)$ wobei $A(G)$ die Adjazenzmatrix von G und $D(G) = (d_{ij})$ eine Diagonalmatrix mit d_{ii} gleich dem Grad des Knoten i in G ist, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Die Laplace Matrix ist positiv semidefinit, der kleinster Eigenwert λ_0 von $L(G)$ ist gleich 0 und seine algebraische Vielfachheit ist gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G (diese Aussagen müssen nicht bewiesen werden). Der zweit-kleinster Eigenwert λ_1 von $L(G)$ heißt *algebraische Zusammenhangszahl von G* und der kleinste positive Eigenwert von $L(G)$ heißt *Fiedler Wert von G*.

   Der Kirchhoff'sche Matrix-Baum-Satz lautet:

   > Sei G ein zusammenhängender Graph mit $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ und seien λ_1, λ_2, ..., λ_{n-1} die von Null verschiedenen Eigenwerte der Laplace Matrix $L(G)$. Sei $\tau(G)$ die Anzahl der *markierten*[1] Spannbäume in G. Dann gilt $\tau(G) = \frac{1}{n}\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$ und äquivalent auch $\tau(G) = |det(L_{uv})|$, $\forall u, v \in \{1, 2, \ldots, n\}$, wobei $L_{u,v}$ jene Submatrix von L ist, die durch das Löschen der Zeile u und der Spalte v aus L entsteht.

   Wenden Sie den Kirchhoff'schen Matrix-Baum-Satz an um folgendes zu zeigen (der Satz selbst muss nicht bewiesen werden):

   (a) $\tau(K_n) = n^{n-2}$, wobei K_n der vollständige Graph auf n Knoten ist.

   (b) $\tau(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$, wobei $K_{m,n}$ der vollständige bipartite Graph mit n Knoten auf der einen Seite und m Knoten auf der anderen Seite der Partition ist.

8. Ein alternativer Beweis des Satzes von Cayley: der Prüfer-Code (für besonderes Interessierte)

   Betrachten Sie eine Abbildung P der Menge der markierten Spannbäume in K_n, $n \geq 3$, auf die Wörter der Länge $n-2$ über dem Alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$, die jedem markierten Spannbaum T in K_n den *Prüfer Code* $P(T) = (t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$ zuordnet[2]. t_1 ist die Nummer (die Marke) des Nachbarns vom Blatt b_1 in T, wobei b_1 das Blatt mit der niedrigsten Markierung in T ist. t_2 ist die Nummer des Nachbarns vom Blatt b_2 in $T_1 := T - b_1$[3], wobei b_2 das Blatt mit der niedrigsten Markierung in T_1 ist. t_3 ist die Nummer (die Marke) des Nachbarns vom Blatt b_3 in $T_1 - b_2$, wobei b_3 das Blatt mit der niedrigsten Markierung in $T_1 - b_2$ ist, u.s.w. bis $n - 2$ Knoten aus T entfernt werden.

   (a) Veranschaulichen Sie die Konstruktion des Prüfer-Codes für ein paar Spannbäume Ihrer Wahl in K_8. Unter Anderem geben Sie den Prüfer Code für einen Pfad auf 8 Knoten, sowie den vollständig bipartiten Graphen $K_{1,7}$ (dieser Graph wird alternativ mit S_8 bezeichnet und heißt Stern auf 8 Knoten).

   (b) Sei $(t_1, \ldots, t_{n-2})$ ein Wort über dem Alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass $(t_1, \ldots, t_{n-2}) = P(T)$ gilt, wobei T der folgendermaßen konstruierte Spannbaum in K_n ist. Man startet mit

[1] Bei markierten Bäumen (Engl. *labelled trees*), handelt es sich um Bäume deren Knoten mit Nummern (Marken) versehen sind. Die Marken der Knoten werden beim Abzählen beruchsichtigt, hier werden alle Bäume, nicht nur die paarweise nicht isomorphen Bäume gezählt.

[2] Ein Wort der Länge n, $n \in \mathbb{N}$, über dem durch die Menge S definierten Alphabet ist ein Element des Kartesischen Produkts $S^n = \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n \text{ Mal}}$.

[3] Für einen Graphen G und einen Knoten $b \in V(G)$ bezeichnet $G - b$ den Graphen, der aus G entsteht, wenn der Knoten b und alle mit b inzidierenden Kanten von G entfernt werden.

einem Graphen T mit Knotenmenge $\{1, 2, \ldots, n\}$ und ohne Kanten und fügt iterativ Kanten zu T hinzu bis T ein Baum wird. Zur Konstruktion werden zwei Listen S_1 und S_2 geführt. S_1 wird als $\{t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}\}$ initialisiert und S_2 wird als leere Liste initialisiert. In der Iteration i wird eine Kante $\{u_i, v_i\}$ in T hinzugefügt, wobei u_i der kleinste Knoten aus $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus (S_1 \cup S_2)$ und v_i das erste Element aus S_1 ist. Dann wird u_i der Liste S_2 hinzugefügt und v_i wird von der Liste S_1 gestrichen. Dieses Prozedere wird $n-2$ mal wiederholt bis die Liste S_1 leer wird. Zu diesem Zeitpunkt besteht S_2 aus $n-2$ Elementen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jene 2 Elemente, die in S_2 nicht vorkommen, werden durch eine Kante in T verbunden. Zeigen Sie, dass das Ergebnis dieser Konstruktion tatschlich ein Spannbaum T in K_n ist und, dass $P(T) = (t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$ gilt. Veranschaulichen Sie die Konstruktion in dem Sie für die folgenden Prüfer-Codes die dazugehörigen Spannbäme in K_7 konstruieren: $(3, 5, 4, 2, 1)$, $(7, 6, 7, 5, 5)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung P eine Bijektion ist und folgern Sie daraus die Aussage des Satzes von Cayley.

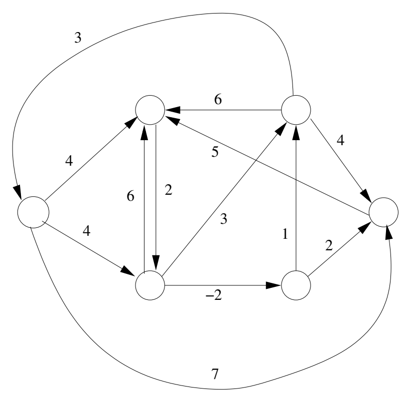

Abbildung 1: Digraph für Beispiel 6